

Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## DIPLOMOVÁ PRÁCE



Štěpán Masák

# Beveridgeův–Nelsonův rozklad a jeho aplikace

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Pravděpodobnost, matematická statistika a ekonometrie

Praha 2015

Rád bych poděkoval své vedoucí, doc. Zuzaně Práškové, za to, že nade mnou nezlomila hůl.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle §60 odst. 1 autorského zákona.

V ..... dne .....

Podpis autora

Název práce: Beveridgeův–Nelsonův rozklad a jeho aplikace

Autor: Štěpán Masák

Katedra: Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Abstrakt: V předložené práci se zabýváme Beveridgeovým–Nelsonovým rozkladem lineárního procesu na trend a cyklickou složku. Nejprve tento rozklad zobecníme pro vícerozměrný lineární proces, a poté jej využijeme k důkazu některých limitních vět pro tento proces a jeho speciální případy, procesy VAR a VARMA. Dále definujeme pojem kointegrace a představíme oblíbený model VEC pro kointegrované časové řady. Na závěr ukážeme metodu, jak se vypořádat s nekonečnými součty objevujícími se při výpočtu Beveridgeova–Nelsonova rozkladu a aplikujeme ji na reálná data. Její výsledky pak porovnáme s aproximací pomocí částečných součtů.

Klíčová slova: Beveridgeův–Nelsonův rozklad, lineární proces, limitní věty, model VEC

Title: Beveridge–Nelson decomposition and its applications

Author: Štěpán Masák

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: doc. RNDr. Zuzana Prášková, CSc., Department of Probability and Mathematical Statistics

Abstract: In this work we deal with the Beveridge–Nelson decomposition of a linear process into a trend and a cyclical component. First, we generalize the decomposition for multidimensional linear process and then we use it to prove some of the limit theorems for the process and its special cases, processes VAR and VARMA. Further, we define the concept of cointegration and introduce the popular VEC model for cointegrated time series. Finally, we show a method how to deal with infinite sums appearing in calculation of the Beveridge–Nelson decomposition and apply it to real data. Then we compare the results of this method with approximations using partial sums.

Keywords: Beveridge–Nelson decomposition, linear process, limit theorems, VEC model

# Obsah

<b>1</b>	<b>BN rozklad jako důkazový prostředek</b>	<b>4</b>
1.1	Lineární proces . . . . .	4
1.2	Procesy VAR a VARMA . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Integrované procesy, kointegrace a model VEC</b>	<b>23</b>
<b>3</b>	<b>BN rozklad v praxi</b>	<b>26</b>
3.1	Teoretický základ . . . . .	26
3.2	Praktická aplikace . . . . .	29
<b>A</b>	<b>Různá používaná tvrzení</b>	<b>35</b>
	<b>Literatura</b>	<b>39</b>

# Úvod

Jednou ze základních úloh analýzy časových řad je vyhledávání dlouhodobých trendů. Existují pro to různé metody; některé předpokládají deterministický trend, jiné vyžadují znalost budoucích dat a jdou tedy aplikovat pouze zpětně.

Stephen Beveridge a Charles R. Nelson ve svém článku [2] z roku 1981 přišli s myšlenkou využití dlouhodobých předpovědí pro odhad trendu nestacionárních časových řad. Uvažují nestacionární řadu  $\{X_t\}$  se stacionárními přírůstků  $Z_t = X_t - X_{t-1}$ , které lze psát ve tvaru lineárního procesu  $Z_t = \mu + \varepsilon_t + \lambda_1 \varepsilon_{t-1} + \dots$ , kde  $\lambda_i$  jsou konstanty a posloupnost  $\{\varepsilon_i\}$  je bílý šum. Označíme-li  $\hat{X}_t(k) = E(X_{t+k} | X_t, X_{t-1}, \dots)$  předpověď  $X_{t+k}$  v čase  $t$ , lze snadno ukázat, že

$$\hat{X}_t(k) = k\mu + X_t + \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \right) \varepsilon_t + \left( \sum_{i=2}^{k+1} \lambda_i \right) \varepsilon_{t-1} + \dots$$

Pro velmi dlouhé horizonty  $k$  je přibližně

$$\hat{X}_t(k) \approx k\mu + X_t + \left( \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right) \varepsilon_t + \left( \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i \right) \varepsilon_{t-1} + \dots$$

Předpověď se tedy asymptoticky přibližuje přímce se směrnicí  $\mu$  a interceptem

$$\bar{X}_t = X_t + \left( \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right) \varepsilon_t + \left( \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i \right) \varepsilon_{t-1} + \dots,$$

který interpretujeme jako trend. Je to totiž hodnota, kterou by proces měl, pokud by již v čase  $t$  dosáhl své dlouhodobě vyrovnané hladiny. Rozdíl

$$c_t = \bar{X}_t - X_t = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \right) \varepsilon_t + \left( \sum_{i=2}^{\infty} \lambda_i \right) \varepsilon_{t-1} + \dots = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \hat{Z}_t(j) - k\mu$$

pak interpretujeme jako cyklickou, přechodnou složku. Jde o součet všech očekávaných změn kromě přírůstku způsobeného driftem. Beveridge s Nelsonem dále ve svém článku dokazují, že jimi určený trend  $\{\bar{X}_t\}$  je náhodná procházka s driftem, zatímco cyklická složka  $\{c_t\}$  je stacionární proces. Mezi přednosti tohoto rozkladu patří, že nepředpokládá deterministický trend, jeho výpočet nevyžaduje znalost budoucích dat a je aplikovatelný na často používané a poměrně obecné modely ARIMA. Také je možné ho zobecnit pro vícerozměrné časové řady.

V této práci se budeme zabývat právě zobecněním Beveridgeova–Nelsonova rozkladu (dále jen BN rozklad) pro vícerozměrné náhodné procesy. V první kapitole této práce se podíváme, jak lze BN rozklad využít k důkazu limitních vět pro

vícerozměrný lineární proces a jeho speciální případy, procesy VAR a VARMA. Ve druhé kapitole definujeme pojem kointegrace a představíme oblíbený model VEC pro kointegrované časové řady. Ve třetí kapitole ukážeme metodu, jak se vypořádat s nekonečnými součty objevujícími se při výpočtu BN rozkladu a aplikujeme ji na reálná data. Její výsledky pak porovnáme s aproximací pomocí částečných součtů. V Dodatku A uvádíme některá pomocná tvrzení.

# Kapitola 1

## BN rozklad jako důkazový prostředek

### 1.1 Lineární proces

V této kapitole se podíváme na BN rozklad trochu jinak, jako na – čistě algebraický – rozklad samotného lineárního procesu. Ten umožňuje dokázat pro lineární proces celou řadu limitních vět za různých kombinací různě silných předpokladů (viz [16]); my zde zobecníme pro vícerozměrný lineární proces několik z nich.

Než přistoupíme k definici samotného lineárního procesu, definujeme několik maticových norem, které budeme dále potřebovat, a uvedeme několik vlastností té nejdůležitější z nich.

**Definice 1.1.** Pro  $p \geq 1$  a matici  $\mathbf{C} = (c^{ij})_{i,j=1}^{m,n}$  definujeme  $l_p$ -normu stejně jako pro vektory z  $\mathbb{R}^{mn}$ , tj.

$$\|\mathbf{C}\|_p = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |c^{ij}|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Podobně definujeme i maximovou normu

$$\|\mathbf{C}\|_\infty = \max_{i,j} |c^{ij}|.$$

*Poznámka.* Tyto normy budeme používat i pro vektory, které budeme považovat za matice typu  $(m \times 1)$ .

Speciálním případem  $l_p$  normy je *Frobeniova norma*  $\|\cdot\|_2$ . Jelikož budeme v tomto textu uvažovat až na výjimky právě tuto normu, budeme ji pro jednoduchost označovat  $\|\cdot\|$ .

**Lemma 1.2** (Vlastnosti Frobeniovy normy). *Pro matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  a  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  platí:*

- i)  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A})} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}')}$ ,
- ii)  $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\|$  (submultiplikativita),
- iii)  $\|\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}\| = \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{C}\|$ , kde  $\otimes$  označuje Kroneckerův součin (viz definici A.5).



*Důkaz.* i) Jde pouze o jiný zápis definice.

ii) Viz [13], str. 291.

iii) S využitím bodu i) a vlastností i)–iii) z lemmatu A.7 dostaneme

$$\begin{aligned}\|\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}\|^2 &= \text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C})'(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{A}' \otimes \mathbf{C}')(\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}'\mathbf{C}) \\ &= \text{tr}(\mathbf{A}'\mathbf{A}) \text{tr}(\mathbf{C}'\mathbf{C}) = \|\mathbf{A}\|^2 \|\mathbf{C}\|^2.\end{aligned}$$

□

**Definice 1.3** (Lineární proces). Posloupnost  $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$   $m$ -rozměrných náhodných vektorů ve tvaru  $\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$ , kde

- i)  $\boldsymbol{\mu}$  je  $m$ -rozměrný vektor
- ii)  $\{\mathbf{C}_j\}_{j=0}^{\infty}$  je posloupnost matic typu  $(m \times m)$  takových, že  $\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_j\|^2 < \infty$   
a
- iii)  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je  $m$ -rozměrný *bílý šum*, tj. posloupnost nekorelovaných centrovaných  $m$ -rozměrných náhodných vektorů s konstantní varianční maticí  $\text{var}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t') = \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \forall t$

nazýváme  $m$ -rozměrným lineárním procesem.

*Poznámka.* Řada  $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$  v definici 1.3 konverguje v  $L_2$ . Pokud nahradíme předpoklady ii) a iii) předpoklady

- ii\*)  $\{\mathbf{C}_j\}_{j=0}^{\infty}$  je posloupnost matic typu  $(m \times m)$  takových, že  $\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_j\| < \infty$  a
- iii\*)  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je posloupnost centrovaných  $m$ -rozměrných náhodných vektorů takových, že existuje konstanta  $K$  taková, že  $E\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\| < K \forall t$ ,

pak řada  $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$  konverguje absolutně skoro jistě.

*Důkaz.* i) konvergence v  $L_2$ :

Pro  $1 \leq i \leq m$  je

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \text{var}((\mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j})^i) &\leq \sum_{j=0}^{\infty} E\|\mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}\|^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} E\|\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}\|^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 \\ &\leq \|\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\|^2 \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_j\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

Tedy řada  $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$  konverguje v  $L_2$  podle věty A.2.

ii) konvergence absolutně s.j.:

Jelikož jsou  $l_p$ -normy ekvivalentní (věta A.1), je také  $\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_j\|_1 < \infty$  a existuje konstanta  $M$  taková, že  $E\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|_1 < M \forall t$ . Pro  $1 \leq i \leq m$  je

$$\sum_{j=0}^{\infty} E |(\mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j})^i| \leq \sum_{j=0}^{\infty} E (\|\mathbf{C}_j\|_1 \cdot \|\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}\|_1) \leq M \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_j\|_1 < \infty$$

díky ekvivalenci norem. Tedy řada  $\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}$  konverguje absolutně s.j. podle věty A.3. □

U  $L_2$ -konvergentního lineárního procesu můžeme snadno spočítat první dva momenty. Jeho střední hodnota je

$$E\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + E \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j E\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \boldsymbol{\mu} \quad \forall t$$

a jeho autokovariance jsou

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h}) &= E(\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_{t+h} - \boldsymbol{\mu})' \\ &= E \left( \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \right) \left( \sum_{j=0}^{h-1} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t+h-j} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_{j+h} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \right)' \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{C}'_{j+h} \quad \forall t. \end{aligned}$$

Lineární proces je tedy stacionární podle následující definice.

**Definice 1.4.** Náhodný proces  $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  nazýváme *stacionárním*, pokud

- i)  $E\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} \forall t \in \mathbb{Z}$ ,
- ii)  $\text{var}(\mathbf{X}_t) = \boldsymbol{\Gamma}_0 \forall t \in \mathbb{Z}$  a
- iii)  $\text{cov}(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_{t+h}) = \boldsymbol{\Gamma}_h \forall t \in \mathbb{Z}$  (tedy závisí pouze na  $h$ ).

*Poznámka.* i) Stacionarita podle výše uvedené definice se často nazývá slabá stacionarita či stacionarita do momentů 2. řádu. Jelikož se však v této práci nebudeme zabývat procesy tzv. silně stacionárními, budeme slabě stacionární procesy nazývat prostě stacionárními.

- ii) V definici stacionarity implicitně předpokládáme existenci *konečných* druhých momentů  $E\mathbf{X}_t' \mathbf{X}_t \forall t$ .

*Poznámka.* V dalším textu budeme uvažovat pouze centrovany lineární proces s  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Tím ovšem neztrácíme na obecnosti, neboť pro necentrovany proces  $\{\tilde{\mathbf{X}}_t\}$  lze substituovat  $\mathbf{X}_t = \tilde{\mathbf{X}}_t - E\tilde{\mathbf{X}}_t$ .

*Poznámka.* Označíme-li  $L$  operátor zpoždění (tj.  $L\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}$ ) a  $\mathbf{C}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j z^j$ , můžeme psát  $\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t$ . Je-li  $\sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_j\| < \infty$ , pak polynom  $\mathbf{C}(z)$  konverguje pro  $|z| < 1$  (ve smyslu  $\|\mathbf{C}(z)\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_j z^j\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_j\| |z|^j < \infty$ ).

Protože při výpočtu BN rozkladu přerovnáváme nekonečné řady náhodných vektorů, uvádíme následující lemma, které nám to umožní.

**Lemma 1.5.** *Pro posloupnosti náhodných veličin  $\{X_n\}_{n=1}^\infty, \{Y_n\}_{n=1}^\infty$  platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \quad (v L_2, s.j.),$$

*má-li pravá strana smysl.*

*Důkaz.* i) V  $L_2$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) &= \text{l. i. m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (X_n + Y_n) \\ &= \text{l. i. m.}_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N X_n + \sum_{n=1}^N Y_n \right) \\ &= \text{l. i. m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N X_n + \text{l. i. m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N Y_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n. \end{aligned}$$

ii) Skoro jistě:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (X_n + Y_n) \right) (\omega) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N (X_n + Y_n) \right) (\omega) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^N X_n(\omega) + \sum_{n=1}^N Y_n(\omega) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N X_n(\omega) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N Y_n(\omega) \\ &= \left( \sum_{n=1}^{\infty} X_n \right) (\omega) + \left( \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \right) (\omega) \quad \forall \omega. \end{aligned}$$

□

**Důsledek 1.6.** *Pro  $m \in \mathbb{N}$  a posloupnosti náhodných veličin  $\{X_{1,n}\}_{n=1}^\infty, \dots, \{X_{m,n}\}_{n=1}^\infty$  platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^m X_{k,n} = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} X_{k,n} \quad (v L_2, s.j.),$$

*má-li pravá strana smysl.*

*Důkaz.* Z lemmatu 1.5 konečnou indukcí. □

*Poznámka.* Předchozí tvrzení platí i pro posloupnosti náhodných vektorů, stačí jej aplikovat na jednotlivé složky.

**Lemma 1.7** (BN rozklad). *Nechť  $\mathbf{C}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j z^j$ , kde  $\mathbf{C}_j$  jsou matice ( $m \times m$ ). Pak*

$$\mathbf{C}(z) = \mathbf{C}(1) - (1-z)\tilde{\mathbf{C}}(z), \quad (1.1)$$

kde

$$\tilde{\mathbf{C}}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}_j z^j, \quad \tilde{\mathbf{C}}_j = \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbf{C}_k.$$

Pokud  $p \geq 1$ , pak

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^p \|\mathbf{C}_j\|^p < \infty \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{\mathbf{C}}_j\|^p < \infty \text{ a } \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \right\| < \infty.$$

*Důkaz.* Rovnost (1.1) ověříme výpočtem.

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(1) - (1-z)\tilde{\mathbf{C}}(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j - \left( \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}_j z^j - \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}_j z^{j+1} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j}_{\mathbf{C}_0} - \left( \tilde{\mathbf{C}}_0 + \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{\mathbf{C}}_{j+1} - \tilde{\mathbf{C}}_j)}_{-\mathbf{C}_{j+1}} z^{j+1} \right) \\ &= \mathbf{C}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_{j+1} z^{j+1} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j z^j. \end{aligned}$$

Dále pro  $p \geq 1$  máme

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^p \|\mathbf{C}_j\|^p < \infty \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} j^p \|\mathbf{C}_j\|_p^p < \infty \quad (1.2a)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} j^p \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m |c_j^{kl}|^p < \infty$$

$$\Leftrightarrow \forall k, l \sum_{j=1}^{\infty} j^p |c_j^{kl}|^p < \infty$$

$$\Rightarrow \forall k, l \sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{c}_j^{kl}|^p < \infty \text{ a } \left| \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{kl} \right| < \infty \quad (1.2b)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m |\tilde{c}_j^{kl}|^p < \infty \text{ a } \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \left| \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{kl} \right| < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{\mathbf{C}}_j\|_p^p < \infty \text{ a } \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \right\|_1 < \infty$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{\mathbf{C}}_j\|^p \text{ a } \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \right\| < \infty, \quad (1.2c)$$

kde v ekvivalencích (1.2a) a (1.2c) využíváme ekvivalenci norem (věta A.1), zatímco implikace (1.2b) plyne z [16], str. 972, lemma 2.1.  $\square$

Snadno můžeme nahlédnout, že se opravdu jedná o BN rozklad popsany v úvodu. Uvažujme proces  $\{\mathbf{X}_t\}$  s přírůstkem ve tvaru lineárního procesu  $\mathbf{Z}_t = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t$  a aplikujme vztah (1.1) na  $\mathbf{Z}_t$ . Dostaneme rozklad

$$\mathbf{C}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\varepsilon}_t + (1 - L)\tilde{\mathbf{C}}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Na levé straně máme přírůstek procesu  $\{\mathbf{X}_t\}$ , na pravé straně pak člen  $(1 - L)\tilde{\mathbf{C}}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t$  je přírůstkem procesu  $\{\tilde{\mathbf{C}}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t\}$ , kde

$$\tilde{\mathbf{C}}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{C}_k \right) \boldsymbol{\varepsilon}_t + \left( \sum_{k=2}^{\infty} \mathbf{C}_k \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} + \dots$$

je zřejmě cyklická složka dle rozkladu z úvodu. Zbývající člen  $\mathbf{C}(1)\boldsymbol{\varepsilon}_t$  je tedy přírůstkem trendu  $\bar{\mathbf{X}}_t$ . Jelikož jde o bílý šum, tvoří trend  $\bar{\mathbf{X}}_t$  náhodnou procházku.

Druhá část lemmatu 1.7 nám dává postačující podmínku pro to, aby rozklad (1.1) měl smysl.

Nyní již máme potřebné nástroje pro důkaz limitních vět pro lineární proces. Začneme dvěma variantami silného zákona velkých čísel (SZVČ). K důkazu nám stačí převést je na jednorozměrný případ, který je již dokázán v článku [16].

**Věta 1.8** (SZVČ). *Nechť  $\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$  je  $m$ -rozměrný lineární proces takový, že*

$$i) \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 < \infty \text{ a}$$

ii)  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. centrované s konečnými druhými momenty.

Pak

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \mathbf{0}.$$

*Důkaz.* Dle důsledku 1.6 lze  $k$ -tou složku vektoru  $\mathbf{X}_t$  psát jako

$$X_t^k = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{c}_j^{k\bullet} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m c_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l = \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l.$$

Z předpokladu i) máme

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 (c_j^{kl})^2 < \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^m (c_j^{hi})^2 = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 < \infty \quad \forall k, l,$$

z předpokladu ii) je  $\{\varepsilon_t^l\}_{t \in \mathbb{Z}}$  posloupnost i.i.d. centrovaných náhodných veličin s konečnými druhými momenty  $\forall l$ . Podle [16], str. 976, věta 3.1 tedy platí

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l = \sum_{l=1}^m \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0.$$

□

**Věta 1.9** (SZVČ). *Nechť  $\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$  je  $m$ -rozměrný lineární proces takový, že*

$$i) \sum_{j=1}^{\infty} j \|\mathbf{C}_j\| < \infty \text{ a}$$

ii)  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. centrované

Pak

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \mathbf{0}.$$

*Důkaz.* Dle důsledku 1.6 lze  $k$ -tou složku vektoru  $\mathbf{X}_t$  psát jako

$$X_t^k = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{c}_j^{k\bullet} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m c_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l = \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l.$$

Z předpokladu i) máme díky ekvivalenci norem

$$\sum_{j=1}^{\infty} j |c_j^{kl}| < \sum_{j=1}^{\infty} j \sum_{h=1}^m \sum_{i=1}^n |c_j^{hi}| = \sum_{j=1}^{\infty} j \|\mathbf{C}_j\|_1 \leq K \sum_{j=1}^{\infty} j \|\mathbf{C}_j\| < \infty \quad \forall k, l,$$

z předpokladu ii) je  $\{\varepsilon_t^l\}_{t \in \mathbb{Z}}$  posloupnost i.i.d. centrovaných náhodných veličin  $\forall l$ . Jelikož je  $\{\mathbf{X}_t\}$  lineární proces ve smyslu definice 1.3, je  $E\|\mathbf{X}_0\| < \infty$  a tedy i  $E|X_0^l| < \infty$ . Podle [16], str. 976, věta 3.2 tedy platí

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t^k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l = \sum_{l=1}^m \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{j=0}^{\infty} c_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0.$$

□

Pokračujeme důkazem centrální limitní věty (CLV). Zde se již nemůžeme odvolat na jednorozměrnou verzi věty, ovšem důkaz můžeme provést analogicky, jako její důkaz v článku [16] (věta 3.4).

**Věta 1.10** (CLV). *Nechť  $\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$  je  $m$ -rozměrný lineární proces takový, že*

$$i) \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 < \infty \text{ a}$$

ii)  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. centrované s konečnými druhými momenty.

Pak

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N_m(\mathbf{0}, \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{C}(1)'),$$

kde  $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0')$ .

*Důkaz.* Aplikací (1.1) dostaneme

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\varepsilon}_t + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-1} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t,$$

kde

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = \tilde{\mathbf{C}}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_j = \sum_{k=j+1}^{\infty} \mathbf{C}_k.$$

Tedy

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t = \mathbf{C}(1) \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_t + \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 - \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n.$$

Podle Lévyho-Lindebergovy CLV platí

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N_m(0, \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon),$$

stačí tedy ukázat, že

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \text{ a } \frac{1}{\sqrt{n}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

což platí, pokud platí

$$\frac{1}{n} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0' \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0 \text{ a } \frac{1}{n} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n' \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0,$$

což platí, protože

$$E(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n' \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n) < \infty,$$

neboť podle lemmatu 1.7 je  $\sum_{j=0}^{\infty} \|\tilde{\mathbf{C}}_j\|^2 < \infty$  a  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{C}}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{n-j}$  je tak prvkem lineárního procesu ve smyslu definice 1.3 konvergentního v  $L_2$ .  $\square$

Následovat bude silný zákon velkých čísel pro rozptyl. Jeho důkaz opět vychází z důkazu jednorozměrné verze ([16], věta 3.7), tentokrát však již vyžaduje větší úpravy. Nejprve však uveďme jedno lemma.

**Lemma 1.11.** *Nechť  $\sum_{s=1}^{\infty} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_s\|^2 < \infty$  a  $r \geq 0$ . Pak*

$$i) \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \sum_{s=j+1}^{\infty} (\mathbf{C}_{s+r} \otimes \mathbf{C}_s) \right\|^2 < \infty,$$

$$ii) \sum_{r=0}^{\infty} \left\| \sum_{s=0}^{\infty} (\mathbf{C}_{s+r} \otimes \mathbf{C}_s) \right\|^2 < \infty.$$

*Důkaz.* i) S využitím lemmatu 1.2 a Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \sum_{s=j+1}^{\infty} (\mathbf{C}_{s+r} \otimes \mathbf{C}_s) \right\|^2 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{s=j+1}^{\infty} s^{-\frac{1}{4}} \|\mathbf{C}_{s+r}\| \cdot \|\mathbf{C}_s\| s^{\frac{1}{4}} \right)^2 \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left( \sum_{s=j+1}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_{s+r}\|^2 \right) \left( \sum_{s=j+1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2 s^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq \left( \sum_{s=1}^{\infty} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=j+1}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_{s+r}\|^2 \right) \\ &\leq \left( \sum_{s=1}^{\infty} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) \left( \sum_{s=1}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_{s+r}\|^2 \sum_{j=0}^{s-1} 1 \right) \\ &\leq \left( \sum_{s=1}^{\infty} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) \left( \sum_{s=1}^{\infty} (s+r)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_{s+r}\|^2 \right) \\ &\leq \left( \sum_{s=1}^{\infty} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right)^2 < \infty. \end{aligned}$$

ii) Opět s využitím lemmatu 1.2 a Cauchyho–Schwarzovy nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{\infty} \left\| \sum_{s=0}^{\infty} (\mathbf{C}_{s+r} \otimes \mathbf{C}_s) \right\|^2 &\leq \sum_{r=0}^{\infty} \left( \|\mathbf{C}_r\| \cdot \|\mathbf{C}_0\| + \sum_{s=1}^{\infty} s^{-\frac{1}{4}} \|\mathbf{C}_{s+r}\| \cdot \|\mathbf{C}_s\| s^{\frac{1}{4}} \right)^2 \\
&\leq \sum_{r=0}^{\infty} \left( \|\mathbf{C}_r\|^2 + \sum_{s=1}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_{s+r}\|^2 \right) \left( \|\mathbf{C}_0\|^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2 s^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq \left( \|\mathbf{C}_0\|^2 + \sum_{s=1}^{\infty} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) \left( \sum_{r=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_r\|^2 + \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} s^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_{s+r}\|^2 \right) \\
&\leq \left( \|\mathbf{C}_0\|^2 + \sum_{s=1}^{\infty} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) \left( \sum_{r=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_r\|^2 + \sum_{t=1}^{\infty} \|\mathbf{C}_t\|^2 \sum_{s=1}^t s^{-\frac{1}{2}} \right) \\
&\leq \left( \|\mathbf{C}_0\|^2 + \sum_{s=1}^{\infty} s^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) \left( \sum_{r=0}^{\infty} \|\mathbf{C}_r\|^2 + 2 \sum_{t=1}^{\infty} t^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{C}_t\|^2 \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Použitá nerovnost

$$\sum_{s=1}^t s^{-\frac{1}{2}} \leq 2t^{\frac{1}{2}}$$

plyne z toho, že funkce  $s \mapsto s^{-\frac{1}{2}}$  je klesající a tedy

$$\sum_{s=1}^t s^{-\frac{1}{2}} \leq \int_0^t s^{-\frac{1}{2}} ds = 2t^{\frac{1}{2}}.$$

□

**Věta 1.12** (SZVČ pro rozptyl). *Nechť  $\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$  je  $m$ -rozměrný lineární proces takový, že*

- i)  $\sum_{j=1}^{\infty} j \|\mathbf{C}_j\|^2 < \infty$ ,
- ii)  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. centrované s konečnými druhými momenty a
- iii)  $\sum_{r=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{C}_{j+r} \otimes \mathbf{C}_j) \right\| < \infty$ .

Pak

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \mathbf{X}_t' \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \Gamma_0 \stackrel{\text{def}}{=} E(\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_0').$$

*Důkaz.* Můžeme psát

$$\mathbf{X}_t \mathbf{X}_t' = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}' \mathbf{C}_i' = \mathbf{X}_{at} + \mathbf{X}_{bt} + \mathbf{X}_{bt}',$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_{at} &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}' \mathbf{C}_j', \\
\mathbf{X}_{bt} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j-r}' \mathbf{C}_{j+r}'.
\end{aligned}$$



S využitím operátoru  $\text{vec}$  (viz definici A.6 a lemma A.7) dostaneme

$$\begin{aligned}
\text{vec } \mathbf{X}_{at} &= \sum_{j=0}^{\infty} \text{vec}(\mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-j} \mathbf{C}'_j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{C}_j \otimes \mathbf{C}_j) \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-j}) \\
&= \mathbf{F}_0(L) \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t), \\
\text{vec } \mathbf{X}_{bt} &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \text{vec}(\mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-j-r} \mathbf{C}'_{j+r}) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{C}_{j+r} \otimes \mathbf{C}_j) \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-j-r}) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{F}_r(L) \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-r}),
\end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{F}_r(L) = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{C}_{j+r} \otimes \mathbf{C}_j) L^j.$$

Aplikací BN rozkladu na  $\mathbf{F}_r(L)$  dostaneme

$$\mathbf{F}_r(L) = \mathbf{F}_r(1) - (1 - L) \tilde{\mathbf{F}}_r(L),$$

kde

$$\tilde{\mathbf{F}}_r(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}_{rj} L^j, \quad \tilde{\mathbf{F}}_{rj} = \sum_{s=j+1}^{\infty} \mathbf{F}_{rs} = \sum_{s=j+1}^{\infty} (\mathbf{C}_{s+r} \otimes \mathbf{C}_s).$$

Tento rozklad má smysl podle lemmatu 1.11 i). Je tedy

$$\text{vec } \mathbf{X}_{at} = \mathbf{F}_0(1) \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t) - (1 - L) \tilde{\mathbf{X}}_{at}, \quad (1.3)$$

$$\text{vec } \mathbf{X}_{bt} = \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\varepsilon}_t - (1 - L) \tilde{\mathbf{X}}_{bt}, \quad (1.4)$$

kde

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{X}}_{at} &= \tilde{\mathbf{F}}_0(L) \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t), \\
\tilde{\mathbf{X}}_{bt} &= \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}_r(L) \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-r}), \\
\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}} &= \sum_{r=1}^{\infty} \mathbf{F}_r(1) (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-r} \otimes \mathbf{I}_m).
\end{aligned}$$

Ukážeme, že

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{vec } \mathbf{X}_{at} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \text{vec } \boldsymbol{\Gamma}_0 \quad (1.5)$$

a

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{vec } \mathbf{X}_{bt} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Podle (1.4) platí (1.6), pokud

$$\frac{1}{n} \tilde{\mathbf{X}}_{bn} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \mathbf{0} \text{ a } \frac{1}{n} \tilde{\mathbf{X}}_{b0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \mathbf{0}. \quad (1.7)$$

a

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\varepsilon}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Podle Kroneckerova lemmatu (1.8) platí, pokud

$$\mathbf{T}_n = \sum_{t=1}^n \frac{1}{t} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\varepsilon}_t$$

konverguje skoro jistě. Ovšem  $\mathbf{T}_n$  je martingal vzhledem k filtraci  $\mathcal{F}_n = \sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}, \dots)$ , neboť

$$\begin{aligned} E[\mathbf{T}_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E \left[ \mathbf{T}_n + \frac{1}{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \middle| \mathcal{F}_n \right] = \\ &= E[\mathbf{T}_n | \mathcal{F}_n] + \frac{1}{n+1} \boldsymbol{\varepsilon}_n^{\mathbf{F}} E[\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbf{T}_n, \end{aligned}$$

a tedy dle věty A.8 konverguje s.j., pokud  $\sup_n E \|\mathbf{T}_n\|^2 < \infty$ , což platí, protože

$$\begin{aligned} \sup_n E \|\mathbf{T}_n\|^2 &= \sup_n E \left( \sum_{t=1}^n \frac{1}{t} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\varepsilon}_t \right)' \left( \sum_{t=1}^n \frac{1}{t} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\varepsilon}_t \right) \\ &= \sup_n E \sum_{t=1}^n \frac{1}{t^2} \boldsymbol{\varepsilon}_t' (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}})' \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\varepsilon}_t + 2E \sum_{t=1}^n \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{t} \frac{1}{t+r} \boldsymbol{\varepsilon}_{t+r}' (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-r-1}^{\mathbf{F}})' \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}} \boldsymbol{\varepsilon}_t \\ &\leq \sup_n E \sum_{t=1}^n \frac{1}{t^2} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}}\|^2 \|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^2 \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} E \|\boldsymbol{\varepsilon}_{t-1}^{\mathbf{F}}\|^2 E \|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^2 \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{t^2} \sigma_{\mathbf{F}}^2 \sigma_{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 < \infty, \end{aligned}$$

kde  $\sigma_\varepsilon^2 = E\|\varepsilon_t\|^2 < \infty$  a

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathbf{F}}^2 &= E\|\varepsilon_{t-1}^{\mathbf{F}}\|^2 \\
&= E\left\|\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{F}_r(1)(\varepsilon_{t-r}\otimes\mathbf{I}_m)\right\|^2 \\
&= E\operatorname{tr}\left(\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{F}_r(1)(\varepsilon_{t-r}\otimes\mathbf{I}_m)\right)'\left(\sum_{r=1}^{\infty}\mathbf{F}_r(1)(\varepsilon_{t-r}\otimes\mathbf{I}_m)\right) \\
&= E\operatorname{tr}\sum_{r=1}^{\infty}(\varepsilon_{t-r}\otimes\mathbf{I}_m)'\mathbf{F}_r(1)'\mathbf{F}_r(1)(\varepsilon_{t-r}\otimes\mathbf{I}_m) \\
&\quad + 2E\operatorname{tr}\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}(\varepsilon_{t-r-s}\otimes\mathbf{I}_m)'\mathbf{F}_{r+s}(1)'\mathbf{F}_r(1)(\varepsilon_{t-r}\otimes\mathbf{I}_m) \\
&= \sum_{r=1}^{\infty}E\|\mathbf{F}_r(1)(\varepsilon_{t-r}\otimes\mathbf{I}_m)\|^2 \\
&\leq \sum_{r=1}^{\infty}\|\mathbf{F}_r(1)\|^2E\|\varepsilon_{t-r}\|^2\|\mathbf{I}_m\|^2 \\
&= m\sigma_\varepsilon^2\sum_{r=1}^{\infty}\|\mathbf{F}_r(1)\|^2 < \infty,
\end{aligned}$$

neboť

$$\sum_{r=1}^{\infty}\|\mathbf{F}_r(1)\|^2 = \sum_{r=1}^{\infty}\left\|\sum_{s=0}^{\infty}(\mathbf{C}_{s+r}\otimes\mathbf{C}_s)\right\|^2 < \infty$$

dle lematu 1.11 ii). Dále (1.7) platí, pokud

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}E\|\tilde{\mathbf{X}}_{bn}\|^2 < \infty,$$

což platí, pokud  $E\|\tilde{\mathbf{X}}_{bn}\|^2 < K < \infty$  pro nějakou konstantu  $K$ , což platí za platnosti předpokladu iii) podle [15], str. 688, tvrzení C.9, neboť

$$\begin{aligned}
E(\operatorname{vec}(\varepsilon_t\varepsilon'_{t-r}))'\operatorname{vec}(\varepsilon_t\varepsilon'_{t-r}) &= E\|\operatorname{vec}(\varepsilon_t\varepsilon'_{t-r})\|^2 = \\
&= E\|\varepsilon_t\varepsilon'_{t-r}\|^2 \leq E\|\varepsilon_t\|^2E\|\varepsilon'_{t-r}\|^2 = \sigma_\varepsilon^4.
\end{aligned}$$

K důkazu (1.5) podle (1.3) stačí, aby platilo

$$\frac{1}{n}\tilde{\mathbf{X}}_{an} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \mathbf{0}, \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n\varepsilon_t\varepsilon'_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \Sigma_\varepsilon \quad (1.10)$$

neboť pak

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{vec } \mathbf{X}_{at} &= \mathbf{F}_0(1) \text{vec} \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t \right) - \frac{1}{n} (\tilde{\mathbf{X}}_{an} - \tilde{\mathbf{X}}_{a0}) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \mathbf{F}_0(1) \text{vec } \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = \sum_{j=0}^{\infty} (\mathbf{C}_j \otimes \mathbf{C}_j) \text{vec } \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \text{vec}(\mathbf{C}_j \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \mathbf{C}'_j) = \text{vec } \boldsymbol{\Gamma}_0 \end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_{at} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \boldsymbol{\Gamma}_0$$

a také

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \mathbf{X}'_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} \boldsymbol{\Gamma}_0$$

Ovšem (1.10) plyne ze SZVČ pro i.i.d. vektory a stačí tak dokázat (1.9). Je

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \|\tilde{\mathbf{X}}_{an}\| &= \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\mathbf{F}}_{0j} \text{vec}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{n-j}) \right\| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n \left( \sum_{s=j+1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}_{n-j}\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=n+1}^{\infty} \left( \sum_{s=j+1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}_{n-j}\|^2 \\ &\leq \frac{1}{n} \max_{0 \leq t \leq n} \|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=j+1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{-j}\|^2 \sum_{s=j+1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Podle lemmatu A.9

$$\frac{1}{n} \max_{0 \leq t \leq n} \|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0,$$

pokud

$$\frac{1}{n} \|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0,$$

což platí, protože

$$\frac{1}{n} \|\boldsymbol{\varepsilon}_n\|^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \|\boldsymbol{\varepsilon}_j\|^2 - \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \|\boldsymbol{\varepsilon}_j\|^2$$

a oba členy rozdílu na pravé straně konvergují s.j. ke stejné limitě  $E\|\boldsymbol{\varepsilon}_0\|^2$  podle SZVČ. Dále  $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{s=j+1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2 = \sum_{s=1}^{\infty} s \|\mathbf{C}_s\|^2 < \infty$ , takže první sčítanec v (1.11) konverguje k nule s.j. Navíc je tím pádem

$$E \left( \sum_{j=1}^{\infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{-j}\|^2 \sum_{s=j+1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2 \right) < \infty$$

takže  $\sum_{j=1}^{\infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_{-j}\|^2 \sum_{s=j+1}^{\infty} \|\mathbf{C}_s\|^2 < \infty$  s.j. a druhý sčítanec v (1.11) konverguje k nule s.j.  $\square$

Poslední větou, které se budeme v této části věnovat, je zákon iterovaného logaritmu (ZIL). Důkaz opět vychází z důkazu jednorozměrné verze v článku [16] (věta 3.3). Jelikož je problém dohledat v literatuře ZIL pro i.i.d. náhodné vektory, na který bychom se mohli odvolat, odvodíme zde nejprve vlastní variantu.

**Věta 1.13** (ZIL pro i.i.d. vektory). *Nechť  $\{\mathbf{X}_t\}_{t=1}^\infty$  je posloupnost  $m$ -rozměrných centrovaných i.i.d. vektorů s jednotkovou kovarianční maticí. Pak*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \left\| \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \right\|_\infty = 1 \text{ s.j.}$$

*Důkaz.* Označme

$$A = \bigcap_{i=1}^m \left[ \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \left| \sum_{t=1}^n X_t^i \right| = 1 \right].$$

Podle ZIL pro i.i.d. veličiny (věta A.11) je zřejmě  $P(A) = 1$  a pro  $\omega \in A$  je dle lemmatu A.10

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \left\| \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t(\omega) \right\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \left| \sum_{t=1}^n X_t^i(\omega) \right| = 1.$$

□

**Věta 1.14** (ZIL). *Nechť  $\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$  je  $m$ -rozměrný lineární proces takový, že*

- i)  $\sum_{j=1}^\infty j^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 < \infty$  a matice  $\mathbf{C}(1)$  je regulární a*
- ii)  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. s regulární kovarianční maticí  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon$  a existuje  $p > 2$  takové, že  $E\|\boldsymbol{\varepsilon}_t\|^p < \infty$ .*

*Pak*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \left\| \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}(1)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \right\|_\infty = 1 \text{ s.j.}$$

*Důkaz.* Podle BN rozkladu je

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(1)\boldsymbol{\varepsilon}_t + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-1} - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t,$$

kde

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_t = \tilde{\mathbf{C}}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t = \sum_{j=0}^\infty \tilde{\mathbf{C}}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad \tilde{\mathbf{C}}_j = \sum_{k=j+1}^\infty \mathbf{C}_k.$$

Tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}(1)^{-1} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t &= \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \sum_{t=1}^n \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_t + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \mathbf{C}(1)^{-1} (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n). \end{aligned}$$

Podle ZIL pro i.i.d. vektory (věta 1.13) platí

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \left\| \sum_{t=1}^n \Sigma_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_t \right\|_{\infty} = 1 \text{ s.j.},$$

stačí tedy dokázat, že

$$\frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \left\| \Sigma_{\varepsilon}^{-\frac{1}{2}} C(1)^{-1} (\tilde{\varepsilon}_0 - \tilde{\varepsilon}_n) \right\|_{\infty} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0.$$

$k$ -tá složka vektoru  $\tilde{\varepsilon}_t$  má tvar

$$\tilde{\varepsilon}_t^k = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j^{k\bullet} \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=1}^m \tilde{c}_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l = \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l = \sum_{l=1}^m \tilde{\varepsilon}_t^{kl},$$

kde  $\tilde{\varepsilon}_t^{kl} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j^{kl} \varepsilon_{t-j}^l$ . Podle věty A.4 platí

$$\frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \tilde{\varepsilon}_0^{kl} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0 \text{ a } \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \tilde{\varepsilon}_n^{kl} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0,$$

pokud

$$E |\tilde{\varepsilon}_n^{kl}|^q = E |\tilde{\varepsilon}_0^{kl}|^q < \infty, \quad n \in \mathbb{N}$$

pro nějaké  $q > 2$ , neboť pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} E \left| \frac{1}{\sqrt{2n \ln^2 n}} \tilde{\varepsilon}_n^{kl} \right|^q = E |\tilde{\varepsilon}_0^{kl}|^q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{q}{2}} |2 \ln^2 n|^{\frac{q}{2}}} < \infty$$

Je

$$E |\tilde{\varepsilon}_n^{kl}|^q = E |\tilde{\varepsilon}_0^{kl}|^q = E \left| \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{c}_j^{kl} \varepsilon_{-j}^l \right|^q.$$

Nechť  $u_N = \sum_{j=0}^N \tilde{c}_j^{kl} \varepsilon_{-j}^l$  pro nějaká  $k$  a  $l$  a  $2 < q \leq p$ . Podle Burkholderovy nerovnosti (věta A.12) existuje konstanta  $c_q$  taková, že

$$E |u_N|^q \leq c_q E \left( \sum_{j=0}^N (\tilde{c}_j^{kl})^2 (\varepsilon_{-j}^l)^2 \right)^{\frac{q}{2}}.$$

Aplikací Minkowského nerovnosti na pravou stranu dostaneme

$$E |u_N|^q \leq c_q \left( \sum_{j=0}^N (\tilde{c}_j^{kl})^2 \right)^{\frac{q}{2}} E |\varepsilon_0^l|^q \leq c_q \left( \sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{c}_j^{kl})^2 \right)^{\frac{q}{2}} E |\varepsilon_0^l|^q = d_q.$$

Víme, že  $d_q < \infty$ , neboť  $\sum_{j=0}^{\infty} (\tilde{c}_j^{kl})^2 < \infty$  z předpokladu i) a lemmatu 1.7 a  $E |\varepsilon_0^l|^q < \infty$  z předpokladu ii). Nyní volme  $q$  takové, že  $2 < q < p$  a máme

$$E (|u_N|^q)^{\frac{p}{q}} = E |u_N|^p \leq d_p.$$

Jelikož  $\frac{p}{q} > 1$ , jsou  $\{|u_N|^q : N = 1, 2, \dots\}$  stejnoměrně integrovatelné podle [14] (str. 29, lemma 5.15). Ovšem  $u_N \xrightarrow{P} \tilde{\varepsilon}_0^{kl}$  (jde o prvek lineárního procesu konvergentního v  $L_2$ , a tedy i v  $P$ ), takže podle [14] (str. 35, věta 6.10)

$$E |u_N|^q \rightarrow E |\tilde{\varepsilon}_0^{kl}|^q \leq d_p < \infty.$$

□

## 1.2 Procesy VAR a VARMA

Lineární proces je sice užitečným teoretickým východiskem při studiu stacionárních procesů, v praxi ovšem vyvstává problém s nekonečným počtem parametrů  $\mathbf{C}_j$ . Proto se pro modelování časových řad často používají procesy VAR (vektorová autoregrese) nebo obecnější VARMA, které mají konečný počet parametrů. Jelikož tyto procesy lze za určitých podmínek vyjádřit ve tvaru lineárního procesu, lze na ně nahlížet jako na jeho konečné paramterizace a lze pro ně upravit i limitní věty z předchozí části. Začneme procesem VAR, popsáním v [15], str. 13–22.

**Definice 1.15.** Posloupnost  $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$   $m$ -rozměrných náhodných vektorů splňujících rovnost

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\nu} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde  $\boldsymbol{\nu}$  je  $m$ -rozměrný vektor,  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p$  jsou matice typu  $(m \times m)$  a  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je posloupnost nekorelovaných centrovaných  $m$ -rozměrných náhodných vektorů s kovarianční maticí  $E\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t' = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \quad \forall t$  nazýváme  $m$ -rozměrným procesem VAR( $p$ ) (VAR řádu  $p$ ).

Označme blokovou matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_{p-1} & \mathbf{A}_p \\ \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m & & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Leží-li všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  uvnitř jednotkového kruhu, nazýváme takový proces VAR *stabilní* a můžeme jej psát ve tvaru  $L_2$ -konvergentního lineárního procesu

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad (1.12)$$

kde  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{J}(\mathbf{I}_{mp} - \mathbf{A})^{-1} \tilde{\boldsymbol{\nu}}$ ,  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$  je bloková matice typu  $(m \times mp)$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\nu}}' = (\boldsymbol{\nu}', 0, \dots, 0)$  je  $mp$ -rozměrný vektor a  $\mathbf{C}_j = \mathbf{J} \mathbf{A}^j \mathbf{J}$ . Z toho plyne, že stabilní proces VAR je také stacionární (ovšem opačná implikace neplatí).

Označíme-li

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{I}_m - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j z^j,$$

můžeme proces VAR( $p$ ) zapsat pomocí operátoru zpoždění  $L$  jako

$$\mathbf{A}(L) \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Nechť  $\mathbf{C}(L)$  je operátor takový, že

$$\mathbf{C}(L) \mathbf{A}(L) = \mathbf{I}_m.$$

Pak vynásobením (1.12) operátorem  $\mathbf{C}(L)$  zleva dostáváme

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{C}(L) \boldsymbol{\nu} + \mathbf{C}(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Odtud srovnáním s (1.12) vidíme, že

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{C}(L)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{A}(L)^{-1}\boldsymbol{\nu} = \left( \mathbf{I}_m - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \right)^{-1} \boldsymbol{\nu}.$$

Označíme-li

$$\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ je vlastním číslem } \mathbf{A}\}$$

spektrální poloměr matice  $\mathbf{A}$ , pak podmínka stability říká, že  $\rho(\mathbf{A}) < 1$ . Z lemmatu A.13 tak plyne, že existuje submultiplikativní norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{A}}$  taková, že  $\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{A}} < 1$  a díky ekvivalenci norem

$$\|\mathbf{C}_j\| \leq K\|\mathbf{C}_j\|_{\mathbf{A}} \leq K\|\mathbf{J}\|_{\mathbf{A}}^2\|\mathbf{A}\|_{\mathbf{A}}^j$$

a tedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 \leq K^2 \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{A}}^4 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{A}}^{2j} < \infty.$$

Nyní již můžeme snadno zformulovat zákon velkých čísel a centrální limitní větu pro stabilní proces VAR.

**Věta 1.16** (SZVČ pro VAR). *Nechť*

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\nu} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

je stabilní  $m$ -rozměrný proces VAR( $p$ ) takový, že  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. s konečnými druhými momenty. Pak

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \boldsymbol{\mu} = \left( \mathbf{I}_m - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \right)^{-1} \boldsymbol{\nu}.$$

*Důkaz.* Podle výše uvedeného je  $\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  lineární proces splňující předpoklady věty 1.8, tedy

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \mathbf{0}$$

a

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \boldsymbol{\mu}.$$

□

**Věta 1.17** (CLV pro VAR). *Nechť*

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\nu} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad t \in \mathbb{Z}$$

je stabilní  $m$ -rozměrný proces VAR( $p$ ) takový, že  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. s konečnými druhými momenty. Pak

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}(1)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} (\mathbf{A}(1)^{-1})'$ ,  $\mathbf{A}(1) = \mathbf{I}_m - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j$  a  $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0')$ .



*Důkaz.* Podle výše uvedeného je  $\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  lineární proces splňující předpoklady věty 1.10 a  $\mathbf{C}(1) = \mathbf{A}(1)^{-1}$ , tedy

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N_m(\mathbf{0}, \mathbf{A}(1)^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon (\mathbf{A}(1)^{-1})').$$

□

Obdobně můžeme podle [15], str. 423–424 postupovat u procesu VARMA.

**Definice 1.18.** Posloupnost  $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$   $m$ -rozměrných náhodných vektorů splňujících rovnost

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\nu} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^q \mathbf{M}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j},$$

kde  $\boldsymbol{\nu}$  je  $m$ -rozměrný vektor,  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_p, \mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_q$  jsou matice typu  $(m \times m)$  a  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je posloupnost nekorelovaných centrovaných  $m$ -rozměrných náhodných vektorů s kovarianční maticí  $E\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t' = \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \forall t$  nazýváme  $m$ -rozměrným procesem VARMA( $p, q$ ).

Podmínka stability je u procesu VARMA stejná jako u procesu VAR, tedy  $\rho(\mathbf{A}) < 1$ , na maticích  $\mathbf{M}_j$  nezávisí. Stabilní proces VARMA můžeme také psát ve tvaru  $L_2$ -konvergentního lineárního procesu

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{C}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j},$$

kde

$$\mathbf{C}_j = \mathbf{D}_j + \sum_{i=1}^q \mathbf{D}_{j-i} \mathbf{M}_i, \quad \mathbf{D}_j = \mathbf{J} \mathbf{A}^j \mathbf{J} \text{ a}$$

$\boldsymbol{\mu}$  a  $\mathbf{J}$  jsou stejné jako u procesu VAR. Stabilní proces VARMA je tedy také stacionární. Dále můžeme s využitím operátoru zpoždění psát

$$\mathbf{A}(L) \mathbf{X}_t = \boldsymbol{\nu} + \mathbf{M}(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

kde

$$\mathbf{A}(z) = \mathbf{I}_m - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j z^j \text{ a } \mathbf{M}(z) = \mathbf{I}_m + \sum_{j=1}^q \mathbf{M}_j z^j.$$

Odtud dostáváme tvar

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{A}(L)^{-1} \boldsymbol{\nu} + \mathbf{A}(L)^{-1} \mathbf{M}(L) \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

Podmínka na koeficienty  $\mathbf{C}_j$  je zde opět splněna, neboť

$$\|\mathbf{C}_j\| \leq K \|\mathbf{C}_j\|_{\mathbf{A}} \leq K \sum_{i=0}^q \|\mathbf{D}_{j-i}\|_{\mathbf{A}} \|\mathbf{M}_i\|_{\mathbf{A}} \leq K \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{A}}^2 \max_{0 \leq i \leq q} \|\mathbf{M}_i\|_{\mathbf{A}} (q+1) \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{A}}^{j-q},$$

kde jsme označili  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{I}_m$ , a tedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^2 \|\mathbf{C}_j\|^2 \leq K^2 \|\mathbf{J}\|_{\mathbf{A}}^4 \max_{0 \leq i \leq q} \|\mathbf{M}_i\|_{\mathbf{A}}^2 (q+1)^2 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{A}}^{2(j-q)} < \infty.$$

Můžeme tedy zformulovat zákon velkých čísel a centrální limitní větu i pro proces VARMA.

**Věta 1.19** (SZVČ pro VARMA). *Nechť*

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\nu} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^q \mathbf{M}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

je stabilní  $m$ -rozměrný proces VARMA( $p, q$ ) takový, že  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. s konečnými druhými momenty. Pak

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \boldsymbol{\mu} = \left( \mathbf{I}_m - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \right)^{-1} \boldsymbol{\nu}.$$

*Důkaz.* Podle výše uvedeného je  $\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  lineární proces splňující předpoklady věty 1.8, tedy

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \mathbf{0}$$

a

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{X}_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} \boldsymbol{\mu}.$$

□

**Věta 1.20** (CLV pro VARMA). *Nechť*

$$\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\nu} + \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{X}_{t-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + \sum_{j=1}^q \mathbf{M}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

je stabilní  $m$ -rozměrný proces VARMA( $p, q$ ) takový, že  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jsou i.i.d. s konečnými druhými momenty. Pak

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N_m(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

kde  $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{A}(1)^{-1} \mathbf{M}(1) \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \mathbf{M}(1)' (\mathbf{A}(1)^{-1})'$ ,  $\mathbf{A}(1) = \mathbf{I}_m - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j$ ,  $\mathbf{M}(1) = \mathbf{I}_m + \sum_{j=1}^q \mathbf{M}_j$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{A}(1)^{-1} \boldsymbol{\nu}$  a  $\boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon = E(\boldsymbol{\varepsilon}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0')$ .

*Důkaz.* Podle výše uvedeného je  $\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  lineární proces splňující předpoklady věty 1.10 a  $\mathbf{C}(1) = \mathbf{A}(1)^{-1} \mathbf{M}(1)$ , tedy

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^n (\mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N_m(\mathbf{0}, \mathbf{A}(1)^{-1} \mathbf{M}(1) \boldsymbol{\Sigma}_\varepsilon \mathbf{M}(1)' (\mathbf{A}(1)^{-1})').$$

□

## Kapitola 2

# Integrované procesy, kointegrace a model VEC

V předchozí kapitole jsme se věnovali především stacionárním procesům ve smyslu definice 1.4. V praxi se ovšem často setkáváme s řadami, které stacionární nejsou. Jednou z možných příčin nestacionarity je přítomnost tzv. stochastického trendu, který je možné odstranit diferencováním. Takové řady pak nazýváme integrovanými.

**Definice 2.1.** Jednorozměrný náhodný proces  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  nazýváme *integrovaný řádu  $d$* , ozn.  $\{X_t\} \sim I(d)$ , pokud  $(d - 1)$ -ní diference  $\Delta^{d-1}X_t$  nejsou stacionární a  $d$ -té diference  $\Delta^d X_t$  jsou stacionární.

*Poznámka.* Pro stacionární řadu  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  budeme psát  $\{X_t\} \sim I(0)$ .

Pokud jde o jednorozměrné časové řady, je situace velice jednoduchá. Integrovanou řadu stačí jednou (výjimečně vícekrát) zdiferencovat, a na získanou stacionární řadu použít vhodný stacionární model.

U vícerozměrných řad je situace komplikovanější. Diferencováním ztrácíme informaci o hladinách jednotlivých složek, a pokud mezi nimi existoval nějaký vztah, ztratíme informaci i o něm. Řady, ve kterých takové vztahy existují, nazýváme kointegrované.

**Definice 2.2.** Složky náhodného procesu  $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  nazýváme *kointegrované řádu  $(d, b)$* , ozn.  $\{\mathbf{X}_t\} \sim CI(d, b)$ , pokud všechny složky jsou  $I(d)$  a existuje nenulový vektor  $\boldsymbol{\beta}$  takový, že  $\{\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_t\} \sim I(d - b)$ .

Zobecněním stacionárního modelu VAR, které umožňuje zachytit vztahy v kointegrovaných časových řadách, je model VEC (vector error correction). Model VEC pro řadu  $\{\mathbf{X}_t\}$  můžeme psát ve tvaru

$$\mathbf{A}(L)(1 - L)\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.1)$$

tedy jde o model VAR pro diference  $(1 - L)\mathbf{X}_t$ , ke kterému je navíc přidán člen  $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_{t-1}$ , kde  $\boldsymbol{\beta}$  je nyní  $(K \times r)$  matice  $r$  lineárně nezávislých kointegračních vektorů a  $\boldsymbol{\alpha}$  je matice  $(K \times r)$ .

*Poznámka.* Označíme-li  $\mathbf{B}(L) = \mathbf{A}(L)(1 - L) - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'L$ , dostaneme pro řadu  $\{\mathbf{X}_t\}$  model VAR

$$\mathbf{B}(L)\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

který ovšem nespĺňuje podmínku stability. Stupeň polynomu  $\mathbf{B}(L)$  je zřejmě o 1 vyšší než stupeň polynomu  $\mathbf{A}(L)$ . Řád modelu VEC pro diferencovanou řadu je tedy o 1 nižší, než řád příslušného modelu VAR pro řadu nediferencovanou.

Model VEC je detailně popsán v [15], kap. 6–8, zde uvedeme pouze minimum potřebné k tomu, abychom jej mohli prakticky aplikovat na reálná data. Před tím, než je možné začít odhadovat koeficienty modelu, je třeba specifikovat tvar modelu, tj. určit:

1. řád modelu VAR pro nediferencovanou řadu,
2. řád integrace jednotlivých složek zkoumané časové řady a
3. počet kointegračních vztahů.

Pro určení řádu modelu VAR je možné použít statistické testy, v praxi se ale častěji určuje řád modelu minimalizací některého z informačních kriterií. Informační kriteria jsou založena na odhadu rozptylové matice šumu. Kromě toho ovšem obsahují také penalizaci za počet parametrů, kterou se jednotlivá kriteria odlišují. Jejich minimalizací tedy hledáme kompromis mezi minimalizací reziduálního rozptylu a minimalizací počtu parametrů. V další kapitole použijeme čtyři kriteria: Akaikeho (AIC), Hannanovo–Quinnovo (HQ), Schwarzovo (SC) a final prediction error (FPE). Vzorce pro jednotlivá kriteria jsou

$$\begin{aligned} AIC(p) &= \ln |\hat{\Sigma}_\varepsilon(p)| + \frac{2pm^2}{T}, \\ HQ(p) &= \ln |\hat{\Sigma}_\varepsilon(p)| + \frac{2 \ln \ln T}{T} pm^2, \\ SC(p) &= \ln |\hat{\Sigma}_\varepsilon(p)| + \frac{\ln T}{T} pm^2, \\ FPE(p) &= |\hat{\Sigma}_\varepsilon(p)| \left( \frac{T + mp + 1}{T - mp - 1} \right)^m, \end{aligned}$$

kde  $\hat{\Sigma}_\varepsilon(p)$  je maximálně věrohodný odhad kovarianční matice  $\Sigma_\varepsilon$  v modelu řádu  $p$ ,  $m$  je dimenze zkoumané řady a  $T$  je počet pozorování. V prostředí  $R$  spočítáme hodnoty informačních kriterií pomocí funkce *VARselect* z knihovny *vars*.

K určení řádu integrace časové řady slouží ADF test (augmented Dickey–Fuller). Testuje hypotézu, že v modelu autoregrese pro diference řady  $\{X_t\}$

$$\Delta X_t = (\rho - 1)X_{t-1} + \gamma_1 \Delta X_{t-1} + \cdots + \gamma_{p-1} \Delta X_{t-p+1} + \varepsilon_t$$

je  $\rho = 1$ , což znamená, že je řada integrovaná. Je-li řada integrovaná, opakujeme test pro její diference, dokud nedojdeme ke stacionární řadě. Podle toho, kolikrát jsme museli diferencovat určíme řád integrace řady. V prostředí  $R$  je ADF test implementován funkcí *adf.test* z knihovny *tseries*.

Posledním krokem specifikace modelu je určení počtu kointegračních vztahů. K tomu lze použít informační kriteria, nebo různé statistické testy. My použijeme Johansenův test, založený na podílu věrohodností. Počet kointegračních vztahů je roven hodnotě  $h(\mathbf{\Pi})$  matice  $\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$  v modelu (2.1), testují se proto hypotézy

$$H_0 : h(\mathbf{\Pi}) = r_0$$

pro hodnoty  $r_0 = 0, 1, \dots$ , dokud hypotézu zamítáme. Jako alternativní hypotéza se obvykle používá buď

$$H_1 : r_0 < h(\mathbf{\Pi}) \leq m,$$

nebo

$$H_1 : h(\mathbf{\Pi}) = r_0 + 1.$$

Testová statistika příslušící první variantě se nazývá *trace statistic*, druhé variantě *maximum eigenvalue statistic*. V prostředí *R* je Johansenův test implementován funkcí *ca.jo* z knihovny *urca*.

# Kapitola 3

## BN rozklad v praxi

### 3.1 Teoretický základ

V této kapitole se vrátíme k původní myšlence BN rozkladu jako rozkladu časové řady na trend a cyklus. Uvažujme nyní  $m$ -rozměrný proces  $\{\mathbf{X}_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , jehož všechny složky jsou  $I(1)$ . Označme jeho diference  $\mathbf{Z}_t = \mathbf{X}_t - \mathbf{X}_{t-1}$  a  $\mathbf{Y}_t = \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\mu}$ , kde  $\boldsymbol{\mu} = E\mathbf{Z}_t$ . Dále označme  $\hat{\mathbf{Y}}_t(j) = E(\mathbf{Y}_{t+j} | \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots)$  předpověď  $\mathbf{Y}_{t+j}$  v čase  $t$ . Potom podle BN rozkladu dostáváme trend

$$\bar{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t(j)$$

a cyklickou složku

$$\mathbf{C}_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t(j).$$

Při praktickém výpočtu rozkladu tak narážíme na nekonečný součet

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t(j).$$

Jednou z možností je samozřejmě aproximovat jej konečným součtem  $\sum_{j=1}^K \hat{\mathbf{Y}}_t(j)$  pro dostatečně veliké  $K$ . Není to ovšem vždy nutné. M. A. Ariño a P. Newbold ve svém článku [1] prezentují metodu pro přesný a efektivní výpočet tohoto rozkladu pro model VARMA, kterou zde uvedeme a vyzkoušíme na reálných datech.

Předpokládejme nejprve, že složky  $\mathbf{X}_t$  nejsou kointegrované a diference  $\mathbf{Z}_t$  se řídí modelem VARMA( $p, q$ )

$$\mathbf{A}(L)\mathbf{Y}_t = \mathbf{M}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \mathbf{Y}_t = \mathbf{Z}_t - \boldsymbol{\mu},$$

kde

$$\mathbf{A}(L) = \mathbf{I}_m - \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j L^j \quad \text{a} \quad \mathbf{M}(L) = \mathbf{I}_m + \sum_{j=1}^q \mathbf{M}_j L^j.$$

**Věta 3.1.** *V BN rozkladu procesu VARMA( $p, q$ ) je*

$$\mathbf{C}_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t(j) = \sum_{j=1}^q \hat{\mathbf{Y}}_t(j) + \mathbf{A}(1)^{-1} \sum_{j=1}^p \sum_{i=j}^p \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{Y}}_t(q - j + 1),$$

kde  $\hat{\mathbf{Y}}_t(i) = \mathbf{Y}_{t+i}$  pro  $i \leq 0$ .

Důkaz. Pro  $h \geq 1$  je

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Y}}_t(q+h) &= E(\mathbf{Y}_{t+q+h} | \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots) \\ &= E\left(\sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{t+q+h-j} + \boldsymbol{\varepsilon}_{t+q+h} + \sum_{j=1}^q \mathbf{M}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t+q+h-j} \middle| \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots\right) \\ &= E\left(\sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{Y}_{t+q+h-j} \middle| \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots\right) \\ &= \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{Y}}_t(q+h-j),\end{aligned}$$

neboť

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+l} | \mathbf{Y}_t, \mathbf{Y}_{t-1}, \dots) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+l}) = \mathbf{0}$$

pro  $l \geq 1$ . Indukcí podle  $h$  dokážeme, že

$$\hat{\mathbf{Y}}_t(q+h) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{B}_j(h) \hat{\mathbf{Y}}_t(q-j), \quad (3.1)$$

kde

$$\mathbf{B}_j(h) = \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{B}_j(h-i), \quad 0 \leq j \leq p-1, \quad h \geq 1 \quad (3.2)$$

s počátečními podmínkami

$$\mathbf{B}_j(h) = \begin{cases} \mathbf{0} & j+h \neq 0, \quad h \leq 0 \\ \mathbf{I}_m & j+h = 0, \quad h \leq 0 \end{cases}.$$

Pro  $h \leq 0$  rovnost (3.1) zřejmě platí, neboť po dosazení počátečních podmínek zbyde na pravé straně pouze člen s  $j = -h$ . V indukčním kroku pak předpokládáme

$$\hat{\mathbf{Y}}_t(q+h) = \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{B}_j(h) \hat{\mathbf{Y}}_t(q-j)$$

a dostáváme

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Y}}_t(q+h+1) &= \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \hat{\mathbf{Y}}_t(q+h+1-j) \\ &= \sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{B}_i(h+1-j) \hat{\mathbf{Y}}_t(q-i) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \underbrace{\sum_{j=1}^p \mathbf{A}_j \mathbf{B}_i(h+1-j)}_{\mathbf{B}_i(h+1)} \hat{\mathbf{Y}}_t(q-i) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \mathbf{B}_i(h+1) \hat{\mathbf{Y}}_t(q-i).\end{aligned}$$

Tím je důkaz rovnosti (3.1) hotov. Můžeme tedy dosadit do vztahu

$$\mathbf{C}_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t(j) = \sum_{j=1}^q \hat{\mathbf{Y}}_t(j) + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t(q+h).$$

Poslední člen je pak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t(q+h) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^k \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{B}_j(h) \hat{\mathbf{Y}}_t(q-j) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{h=1}^k \mathbf{B}_j(h) \hat{\mathbf{Y}}_t(q-j).$$

Označíme-li

$$\mathbf{B}_j = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^k \mathbf{B}_j(h),$$

dostáváme

$$\mathbf{C}_t = \sum_{j=1}^q \hat{\mathbf{Y}}_t(j) + \sum_{j=0}^{p-1} \mathbf{B}_j \hat{\mathbf{Y}}_t(q-j). \quad (3.3)$$

Zbývá pouze dopočítat  $\mathbf{B}_j$ . Podle (3.2) je

$$\sum_{h=1}^k \mathbf{B}_j(h) = \sum_{h=1}^k \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \mathbf{B}_j(h-i) = \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \sum_{h=1-i}^{k-i} \mathbf{B}_j(h).$$

Limitním přechodem pro  $k \rightarrow \infty$  s přihlédnutím k počátečním podmínkám dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_j &= \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \sum_{h=1-i}^{\infty} \mathbf{B}_j(h) \\ &= \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \sum_{h=1}^{\infty} \mathbf{B}_j(h) + \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \sum_{h=1-i}^0 \mathbf{B}_j(h) \\ &= \left( \sum_{i=1}^p \mathbf{A}_i \right) \mathbf{B}_j + \sum_{i=j+1}^p \mathbf{A}_i \end{aligned}$$

a odtud

$$\mathbf{B}_j = \mathbf{A}(1)^{-1} \sum_{i=j+1}^p \mathbf{A}_i.$$

Dosazením do (3.3) získáme dokazovanou rovnost.  $\square$

Nyní přepokládejme, že mezi složkami řady  $\mathbf{X}_t$  existuje  $r < m$  lineárně nezávislých kointegračních vztahů, tj. existuje  $(r \times m)$  matice  $\beta'$  hodnosti  $r$  taková, že řada  $\beta' \mathbf{X}_t$  je stacionární. Označme  $\boldsymbol{\mu}_c = E\beta' \mathbf{X}_t$  a  $\mathbf{Z}_t = \beta' \mathbf{X}_t - \boldsymbol{\mu}_c$  a uvažujme VEC model

$$\mathbf{A}(L)(1-L)\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha}\beta' \mathbf{X}_{t-1} + \mathbf{M}(L)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (3.4)$$

kde  $\boldsymbol{\alpha}$  je  $(m \times r)$  matice parametrů,  $\mathbf{A}(L)$  a  $\mathbf{M}(L)$  jsou definovány jako u modelu VARMA( $p, q$ ) a  $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{A}(1)\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\mu}_c$ . Rovnici (3.4) můžeme rozepsat jako

$$(1-L)\mathbf{X}_t + (\mathbf{A}(L) - \mathbf{I}_m)(1-L)\mathbf{X}_t = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\alpha}\beta' \mathbf{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t + (\mathbf{M}(L) - \mathbf{I}_m)\boldsymbol{\varepsilon}_t.$$



Vynásobením  $\beta'$  a přeuspořádáním členů dostaneme

$$\begin{aligned}\beta' \mathbf{X}_t - (\mathbf{I}_m + \beta' \alpha) \beta' \mathbf{X}_{t-1} + \beta' (\mathbf{A}(L) - \mathbf{I}_m) (1 - L) \mathbf{X}_t &= \\ &= \beta' \gamma + \beta' \varepsilon_t + \beta' (\mathbf{M}(L) - \mathbf{I}_m) \varepsilon_t.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Rovnice (3.4) a (3.5) můžeme psát jako

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(L) \mathbf{Y}_t - \alpha \mathbf{Z}_{t-1} &= \mathbf{M}(L) \varepsilon_t \\ (\mathbf{I}_m - (\mathbf{I}_m + \beta' \alpha) L) \mathbf{Z}_t + \beta' (\mathbf{A}(L) - \mathbf{I}_m) \mathbf{Z}_t &= \boldsymbol{\eta}_t + \beta' (\mathbf{M}(L) - \mathbf{I}_m) \varepsilon_t,\end{aligned}$$

kde  $\boldsymbol{\eta}_t = \beta' \varepsilon_t$ . tyto dvě rovnice nám pak dávají VARMA model

$$\mathbf{A}^*(L) \mathbf{Y}_t^* = \mathbf{M}^*(L) \varepsilon_t^*, \quad (3.6)$$

kde

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_t^* &= \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_t \\ \mathbf{Z}_t \end{pmatrix}, \\ \varepsilon_t^* &= \begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \boldsymbol{\eta}_t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^*(L) &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}(L) & -\alpha L \\ \beta' (\mathbf{A}(L) - \mathbf{I}_m) & \mathbf{I}_m - (\mathbf{I}_m + \beta' \alpha) L \end{pmatrix} \text{ a} \\ \mathbf{M}^*(L) &= \begin{pmatrix} \mathbf{M}(L) & \mathbf{0} \\ \beta' (\mathbf{M}(L) - \mathbf{I}_m) & \mathbf{I}_m \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Na model (3.6) můžeme použít větu 3.1 a dostaneme

$$\mathbf{C}_t^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t^*(j) = \sum_{j=1}^q \hat{\mathbf{Y}}_t^*(j) + \mathbf{A}^*(1)^{-1} \sum_{j=1}^p \sum_{i=j}^p \mathbf{A}_i^* \hat{\mathbf{Y}}_t^*(q - j + 1). \quad (3.7)$$

Cyklická složka v původním modelu je pak  $\mathbf{C}_t = (\mathbf{I}_m \quad \mathbf{0}_{m \times r}) \mathbf{C}_t^*$  a trend  $\bar{\mathbf{X}}_t = \mathbf{X}_t + \mathbf{C}_t$ .

## 3.2 Praktická aplikace

Metodu z předchozí části nyní použijeme pro analýzu reálného (očistěného od inflace obou zemí) kurzu amerického dolaru vůči české koruně inspirovanou článkem [3]. Přesný rozklad navíc porovnáme s přibližnými rozklady získanými aproximací

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \hat{\mathbf{Y}}_t(j) \approx \sum_{j=1}^K \hat{\mathbf{Y}}_t(j) \quad (3.8)$$

pro různé hodnoty  $K$ .

Jako pomocné proměnné do našeho modelu použijeme akciové indexy obou států očistěné od inflace (index PX-GLOB za ČR a index S&P 500 za USA) a rovněž indexy průmyslové produkce obou zemí. Před použitím všechny řady zlogaritmujeme. Indexy průmyslové produkce navíc očistíme od roční sezonnosti tím, že od každého pozorování odečteme průměrnou hodnotu pro příslušný kalendářní

označení	název	zdroj
$ER$	směnný kurz USD/CZK	[7]
$SPI_c$	akciový index ČR	[6]
$SPI_u$	akciový index USA	[10]
$IPI_c$	index prům. produkce ČR	[8]
$IPI_u$	index prům. produkce USA	[4]
$CPI_c$	inflace ČR	[9]
$CPI_u$	inflace USA	[5]

Tabulka 3.1: Použitá data.

kritérium	AIC	HQ	SC	FPE
řád $p$	3	3	1	3

Tabulka 3.2: Doporučený řád modelu na základě různých kritérií.

měsíc a přičteme průměr celkový. Použitá data jsou shrnuta v tabulce 3.1. Analýzu provádíme v prostředí *R* verze 2.15.1. Zdrojový kód je v příloženém souboru *vypocet.R*, použitá data pak v souboru *data.csv*. Jde o měsíční data za období leden 2000 – červen 2013.

Model specifikujeme podle návodu podaného v druhé kapitole. Nejprve určíme řád modelu VAR pro nediferencovanou časovou řadu. V tabulce 3.2 jsou uvedené řády  $p$ , pro které je dosažena minimální hodnota jednotlivých informačních kritérií, která program *R* nabízí. Tři ze čtyř shodně udávají řád  $p = 3$ , čemuž odpovídá řád modelu VEC  $p = 2$ , který pro náš model použijeme.

Dále zjistíme, zda nejsou některé složky řady integrované. K tomu nám poslouží ADF test, jehož  $p$ -hodnoty jsou shrnuty v tabulce 3.3. U žádné řady nelze zamítnout nulovou hypotézu, tedy je považujeme za integrované. U prvních diferencí však již nulovou hypotézu bezpečně zamítáme, podle ADF testu jsou tedy všechny řady  $I(1)$  a je na místě otestovat možnou přítomnost kointegrace. Provedeme proto sérii Johansenových testů ve variantě *trace statistic*. Výsledky jsou shrnuty v tabulce 3.4, podle testu skutečně existuje mezi řadami jeden kointegrační vztah, model tedy identifikujeme jako VEC(2).

K odhadu parametrů modelu v *R* použijeme funkci *cajorls* z knihovny *urca*, která parametry odhadne metodou nejmenších čtverců. Pro výpočet rozkladu v odhadnutém modelu použijeme vzorec (3.7). Vývoj kurzu USD/CZK spolu s trendem spočteným pomocí BN rozkladu vidíme na obrázku 3.1.

Pro srovnání vyzkoušíme ještě přibližný výpočet trendu podle vzorce (3.8) pro hodnoty  $K = 1, 5, 10, 20$ . Srovnání s přesným výpočtem vidíme na obrázcích 3.2–3.5. Je patrné, že řada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \hat{Y}_t(j)$$

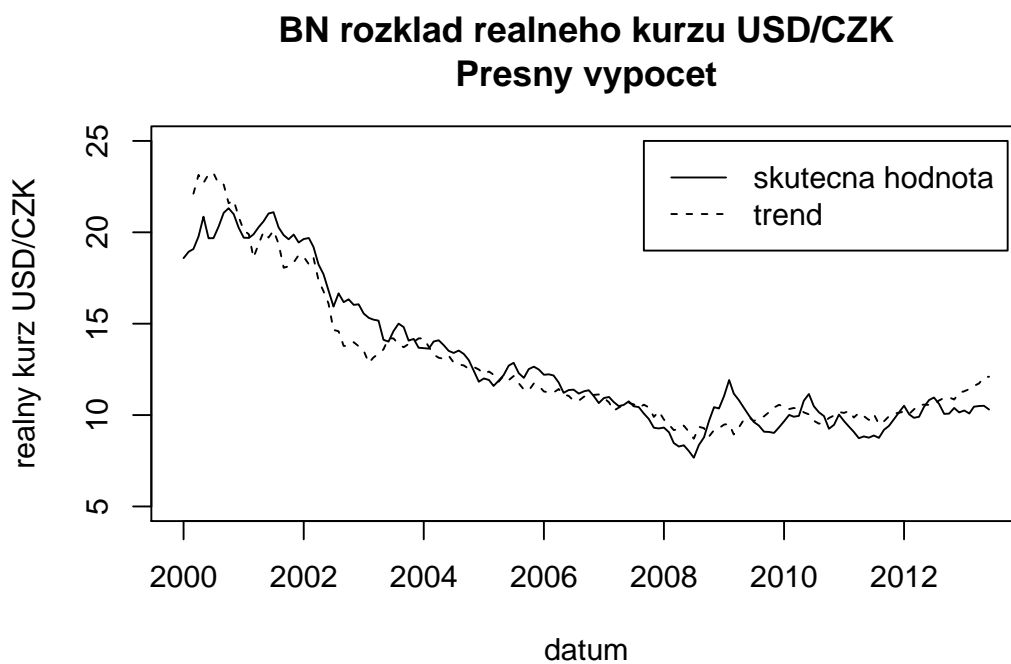
konverguje rychle, již pro  $K = 20$  je aproximace v grafu nerozeznatelná od přesného výsledku. Nicméně vzhledem k existenci přesné a efektivní metody není důvod spokojit se s aproximací.

řada	p-hodnota	
	nediferencované	1. diference
$ER$	0,67	< 0,01
$SPI_c$	0,91	< 0,01
$SPI_u$	0,43	< 0,01
$IPI_c$	0,71	< 0,01
$IPI_u$	0,60	< 0,01

Tabulka 3.3: P-hodnoty ADF testu.

hypotéza	test. statistika	10% krit. hod.	5% krit. hod.	1% krit. hod.
$r = 0$	72,79	66,49	70,60	78,87
$r = 1$	38,93	45,23	48,28	55,43
$r = 2$	21,72	28,71	31,52	37,22
$r = 3$	6,00	15,66	17,95	23,52
$r = 4$	0,73	6,50	8,18	11,65

Tabulka 3.4: Výsledky Johansenova testu.



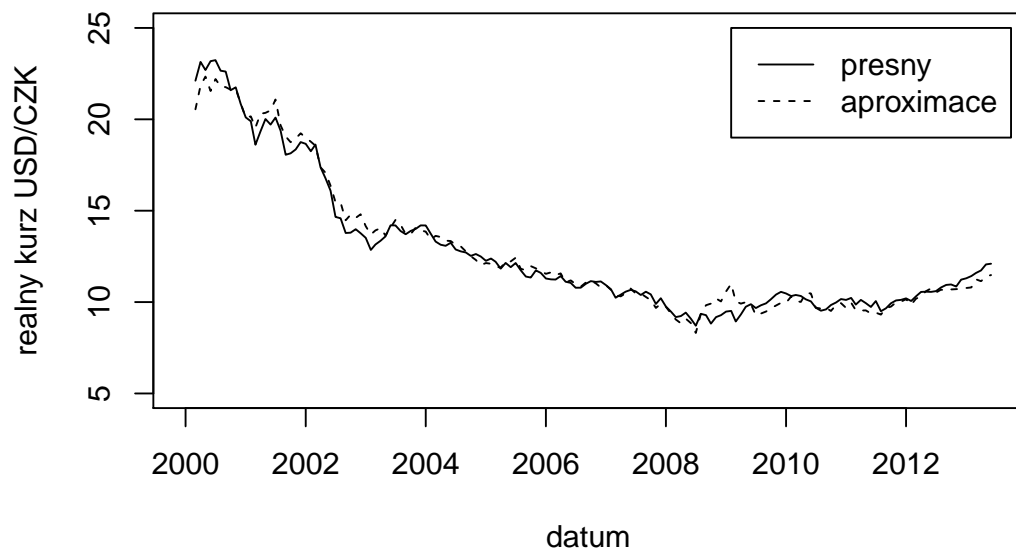
Obrázek 3.1: BN rozklad reálného kurzu USD/CZK - přesný výpočet.

### BN rozklad realneho kurzu USD/CZK Aproximace pro $K=1$



Obrázek 3.2: Aproximace pro  $K = 1$ .

### BN rozklad realneho kurzu USD/CZK Aproximace pro $K=5$



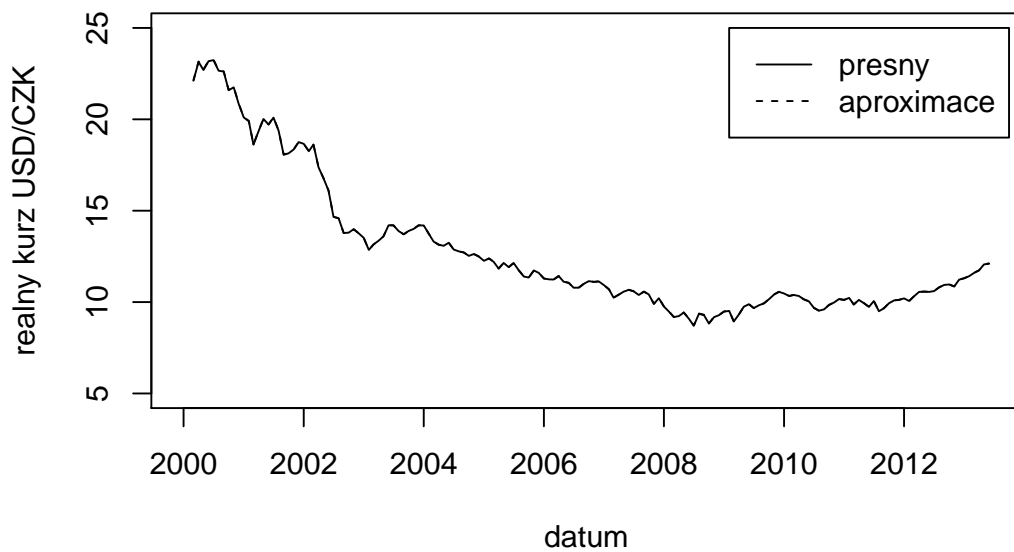
Obrázek 3.3: Aproximace pro  $K = 5$ .

**BN rozklad realneho kurzu USD/CZK  
Aproximace pro  $K=10$**



Obrázek 3.4: Aproximace pro  $K = 10$ .

**BN rozklad realneho kurzu USD/CZK  
Aproximace pro  $K=20$**



Obrázek 3.5: Aproximace pro  $K = 20$ .

# Závěr

Zabývali jsme se Beveridgeovým–Nelsonovým rozkladem a jeho zobecněním pro vícerozměrné náhodné procesy. V první kapitole jsme ukázali jeho využití v teorii coby prostředku k důkazu limitních vět pro lineární proces. Ve druhé kapitole jsme podali stručný návod ke specifikaci oblíbeného modelu VEC pro kointegrované časové řady. Ve třetí kapitole jsme pak vyzkoušeli BN rozklad v praxi k určení trendu v časové řadě kurzu amerického dolaru vůči české koruně.

# Dodatek A

## Různá používaná tvrzení

Zde uvádíme různá tvrzení především z teorie pravděpodobnosti a lineární algebry, která v textu využíváme, ovšem s tématem práce přímo nesouvisí.

**Věta A.1** (Ekvivalence norem). *Nechť  $X$  je reálný či komplexní vektorový prostor konečné dimenze. Pak všechny normy na  $X$  jsou si ekvivalentní, tj. jsou-li  $\|\cdot\|_a$  a  $\|\cdot\|_b$  dvě normy na  $X$ , pak ex. čísla  $0 < n, N < \infty$  taková, že  $n\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq N\|x\|_a \forall x \in X$ .*

*Důkaz.* Viz [13], str. 272, důsledek 5.4.5. □

**Věta A.2** (Sčitatelnost v  $L_2$ ). *Nechť  $X_n \in L_2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  jsou nekorelované. Pak  $\sum_{n=1}^{\infty} (X_n - EX_n)$  je sčitatelná v  $L_2$ , právě když  $\sum_{n=1}^{\infty} \text{var } X_n < \infty$ .*

*Důkaz.* Viz [14], str. 68, věta 11.4. □

**Věta A.3** (Sčitatelnost s.j.). *Nechť  $X_n \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Pak  $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$  je sčitatelná skoro jistě, právě když  $\sum_{n=1}^{\infty} EX_n < \infty$ .*

*Důkaz.* Posloupnost částečných součtů  $\sum_{n=1}^N X_n$ ,  $N \in \mathbb{N}$  je neklesající, tedy má bodovou limitu  $X$  a podle Lebesgueovy věty je

$$EX = E \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N X_n = \lim_{N \rightarrow \infty} E \sum_{n=1}^N X_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N EX_n < \infty,$$

a tedy musí být  $X < \infty$  s.j. □

**Věta A.4** (Postačující podmínka konvergence s.j.). *Nechť  $X_n, n \in \mathbb{N}$  jsou náhodné veličiny takové, že  $\sum_{n=1}^{\infty} E|X_n|^p < \infty$  pro nějaké  $p > 0$ . Pak  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0$ .*

*Důkaz.* Podle Markovovy nerovnosti je  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \frac{1}{k}) \leq k^p \sum_{n=1}^{\infty} E|X_n|^p < \infty$$

a podle Borelova–Cantelliho lemmatu je pak  $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$P(\limsup_{n \rightarrow \infty} [|X_n| \geq \frac{1}{k}]) = 0,$$

tedy

$$\forall k \in \mathbb{Z} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{l=n}^{\infty} |X_l| \geq \frac{1}{k}\right) = 0,$$

tj.

$$P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{l=n}^{\infty} |X_l| < \frac{1}{k}\right) = 1,$$

a tedy  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{s.j.}} 0$ . □

**Definice A.5** (Kroneckerův součin). Necht'  $\mathbf{A} = (a^{ij})_{i,j=1}^{m,n}$  a  $\mathbf{B} = (b^{ij})_{i,j=1}^{p,q}$  jsou matice. Pak bloková matice  $(mp \times nq)$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a^{11} \mathbf{B} & \dots & a^{1n} \mathbf{B} \\ \vdots & & \vdots \\ a^{m1} \mathbf{B} & \dots & a^{mn} \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

je Kroneckerovým součinem matic  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ .

**Definice A.6** (Operátor vec). Necht'  $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$  je  $(m \times n)$  matice tvořená sloupcovými vektory  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . Operátor vec transformuje matici  $\mathbf{A}$  na  $mn$ -rozměrný vektor spojením těchto sloupců, tedy

$$\text{vec}(\mathbf{A}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}.$$

**Lemma A.7** (Vlastnosti Kroneckerova součinu a operátoru vec). *Pro matice vyhovujících rozměrů platí:*

- i)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}'$
- ii)  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$
- iii)  $\text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) \text{tr}(\mathbf{B})$
- iv)  $\text{vec}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{vec}(\mathbf{A}) + \text{vec}(\mathbf{B})$
- v)  $\text{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}' \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{B})$
- vi)  $\text{vec}(\mathbf{AB}) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{A}) \text{vec}(\mathbf{B}) = (\mathbf{B}' \otimes \mathbf{I}) \text{vec}(\mathbf{A})$

*Důkaz.* [15], str. 661–662. □

**Věta A.8.** *Necht'  $1 < p < \infty$ . Pokud  $\{\mathbf{X}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  je  $m$ -rozměrný martingal a  $\sup_{n \in \mathbb{N}} E \|\mathbf{X}_n\|^p < \infty$ , pak  $\mathbf{X}_n$  konverguje v  $L_p$  i skoro jistě.*

*Důkaz.* Pro  $k \in \{1, \dots, m\}$  a nějaké  $K > 0$  je

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E |X_n^k|^p \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} E \|\mathbf{X}_n\|_p^p \leq K \sup_{n \in \mathbb{N}} E \|\mathbf{X}_n\|^p < \infty.$$

Podle [11] (str. 18, důsledek 2.2) tak konvergují jednotlivé složky procesu  $\{\mathbf{X}_n\}$  a tedy konverguje i samotný proces  $\{\mathbf{X}_n\}$ . □



**Lemma A.9.** *Nechť  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  je posloupnost náhodných veličin taková, že*

$$\frac{1}{n} X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0.$$

*Pak také*

$$\frac{1}{n} \max_{0 \leq t \leq n} X_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0.$$

*Důkaz.* Označme jev

$$A = \left[ \frac{1}{n} X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \right]$$

a zvolme  $\omega \in A$  libovolné pevné. Jelikož  $\max_{0 \leq t \leq n} X_t(\omega)$  se poprvé nabývá v nějakém čase  $t_n(\omega) \leq n$ , je

$$0 \leq \frac{1}{n} \max_{0 \leq t \leq n} X_t(\omega) = \frac{1}{n} X_{t_n(\omega)}(\omega) \leq \frac{1}{t_n(\omega)} X_{t_n(\omega)}(\omega).$$

Posloupnost  $\{t_n(\omega)\}_{n=1}^\infty$  je zřejmě neklesající, tedy existuje

$$T(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} t_n(\omega) \in \mathbb{N} \cup \infty.$$

Je-li  $T(\omega) = \infty$ , je

$$\left\{ \frac{1}{t_n(\omega)} X_{t_n(\omega)}(\omega) \right\}_{n=1}^\infty$$

podposloupnost vybraná z

$$\left\{ \frac{1}{n} X_n(\omega) \right\}_{n=1}^\infty$$

a

$$\frac{1}{n} \max_{0 \leq t \leq n} X_t(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Je-li  $T(\omega) \in \mathbb{N}$ , pak pro dostatečně velká  $n$  je  $t_n(\omega) = T(\omega)$  a

$$\frac{1}{n} \max_{0 \leq t \leq n} X_t(\omega) = \frac{1}{n} X_{t_n(\omega)}(\omega) = \frac{1}{n} X_{T(\omega)}(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Jelikož

$$\frac{1}{n} \max_{0 \leq t \leq n} X_t(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \forall \omega \in A,$$

přičemž  $P(A) = 1$ , platí

$$\frac{1}{n} \max_{0 \leq t \leq n} X_t \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{s.j.} 0.$$

□

**Lemma A.10** (Záměna maxima a limes superior). *Nechť  $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty$  jsou posloupnosti reálných čísel. Pak*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n\}$$

*Důkaz.* i)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} \geq \max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n\}$ :  
Není-li posloupnost  $\{\max\{a_n, b_n\}\}_{n=1}^{\infty}$  shora omezená, je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} = \infty$$

a nerovnost zřejmě platí. Jinak je

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{k \geq n} \{a_k, b_k\} \\ &\geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{k \geq n} a_k \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \end{aligned}$$

Obdobně je  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$ .

ii)  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \max\{a_n, b_n\} \leq \max\{\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n\}$ :

Je-li číslo  $h$  hromadnou hodnotou posloupnosti  $\{\max\{a_n, b_n\}\}$ , pak existuje vybraná podposloupnost taková, že  $\max\{a_{n_k}, b_{n_k}\} \rightarrow h$ . Z ní lze ovšem vybrat podposloupnost tvořenou pouze prvky  $\{a_n\}$  nebo pouze prvky  $\{b_n\}$ . Tedy platí, že  $\mathcal{H}(\{\max\{a_n, b_n\}\}) \subseteq \mathcal{H}(\{a_n\}) \cup \mathcal{H}(\{b_n\})$ , kde  $\mathcal{H}(\{x_n\})$  je množina hromadných hodnot posloupnosti  $\{x_n\}$ , a  $\max \mathcal{H}(\{\max\{a_n, b_n\}\}) \leq \max\{\max \mathcal{H}(\{a_n\}), \max \mathcal{H}(\{b_n\})\}$

□

**Věta A.11** (ZIL pro i.i.d. veličiny). *Nechť  $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$  je posloupnost i.i.d. centrovaných náhodných veličin s rozptylem  $0 < \sigma^2 < \infty$ . Pak*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n\sigma^2 \ln^2 n}} \left| \sum_{t=1}^n X_t \right| \text{ s.j.}$$

*Důkaz.* Situace s nezávislými veličinami je speciálním případem věty dokazované v článku [12], str. 170. □

**Věta A.12** (Burkholderova nerovnost). *Nechť  $S_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  je martingal s diferencemi  $X_n = S_n - S_{n-1}$ . Nechť  $1 < p < \infty$ . Pak existují konstanty  $c_p$  a  $d_p$  závislé pouze na  $p$  takové, že*

$$c_p E \left( \sum_{k=1}^n X_k^2 \right)^{\frac{p}{2}} \leq E |S_n|^p \leq d_p E \left( \sum_{k=1}^n X_k^2 \right)^{\frac{p}{2}}.$$

*Důkaz.* Viz [11], str. 23, věta 2.10. □

**Lemma A.13.** *Nechť  $\mathbf{A}$  je čtvercová matice se spektrálním poloměrem  $\rho(\mathbf{A}) = \max\{|\lambda|, \lambda \text{ je vlastním číslem } \mathbf{A}\}$  a  $\varepsilon > 0$ . Pak existuje submultiplikativní matricová norma  $\|\cdot\|$  taková, že*

$$\|\mathbf{A}\| \leq \rho(\mathbf{A}) + \varepsilon.$$

*Důkaz.* Viz [13], str. 297, lemma 5.6.10. □

# Literatura

- [1] Ariño M. A. – Newbold P.: Computation of the Beveridge–Nelson decomposition for multivariate economic time series, *Economic Letters*, October 1998, Volume 61, Issue 1, s. 37–42.
- [2] Beveridge S., Nelson C. R.: A new approach to decomposition of economic time series into permanent and transitory components with particular attention to measurement of the ‘business cycle’, *Journal of Monetary Economics*, 1981, Volume 7, Issue 2, s. 151–174.
- [3] Beyaert A. – Medina A. J. Q.: Computation of the Beveridge–Nelson decomposition in the case of cointegrated systems with  $I(0)$  variables, *Economic Letters*, September 2001, Volume 72, Issue 3, s. 283–289.
- [4] Board of Governors of the Federal Reserve System, *US IP not seasonally adjusted* [online], [cit. 2013-08-14], Dostupné z: [http://www.federalreserve.gov/releases/g17/ipdisk/ip\\_nsa.txt](http://www.federalreserve.gov/releases/g17/ipdisk/ip_nsa.txt)
- [5] Bureau of labor Statistics, *Consumer Price Index – All Urban Consumers* [online], [cit. 2013-08-14], Dostupné z: <http://data.bls.gov/cgi-bin/surveymost?cu>
- [6] Burza cenných papírů Praha, *Burza cenných papírů Praha* [online], [cit. 2013-08-07], Dostupné z: <http://ftp.pse.cz/Info.bas/Cz/PX-GLOB.csv>
- [7] Česká národní banka, *Databáze agregovaných časových řad ARAD* [online], [cit. 2013-08-14], Dostupné z: <http://www.cnb.cz/docs/ARADY/HTML/index.htm>
- [8] Český statistický úřad, *Index průmyslové produkce: bazické indexy 01/2000 – 06/2013* [online], [cit. 2013-08-07], Dostupné z: [http://www.czso.cz/csu/csu.nsf/i/tab\\_11\\_prucr13/\\$File/prucr080613\\_11.xls](http://www.czso.cz/csu/csu.nsf/i/tab_11_prucr13/$File/prucr080613_11.xls)
- [9] Český statistický úřad, *Inflace 01/97 – 06/2013* [online], [cit. 2013-08-07], Dostupné z: [http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/mira\\_inflace](http://www.czso.cz/csu/redakce.nsf/i/mira_inflace)
- [10] Federal Reserve Bank of St. Louis, *S&P 500 Stock Price Index (SP500)* [online], [cit. 2013-08-14], Dostupné z: <http://research.stlouisfed.org/fred2/series/SP500/downloaddata>
- [11] Hall P. – Heyde C. C.: *Martingale Limit Theory and Its Application*, New York: Academic Press, 1980.

- [12] Hartman P. – Wintner A.: On the Law of the Iterated Logarithm, *American Journal of Mathematics*, Jan. 1941, Vol. 63, No. 1, s. 169–176.
- [13] Horn R. A. – Johnson C. R.: *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
- [14] Lachout P.: *Teorie pravděpodobnosti*, 2. vyd., Praha: Karolinum, 2004.
- [15] Lütkepohl H.: *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Berlin: Springer, 2005.
- [16] Philips P. C. B. – Solo V.: Asymptotics for Linear Processes, *The Annals of Statistics*, Jun. 1992, Vol. 20, No. 2, s. 971–1001.

# Seznam zkratek a použité značení

## Zkratky

ADF test	augmented Dickey–Fuller test
AIC	Akaikeho informační kritérium
ARIMA	autoregressive integrated moving average
BN rozklad	Beveridgeův–Nelsonův rozklad
CLV	centrální limitní věta
FPE	final prediction error
HQ	Hannahovo–Quinnovo informační kritérium
SC	Schwarzovo informační kritérium
SZVČ	silný zákon velkých čísel
VAR	vektorová autoregrese
VARMA	autoregressive moving average
VEC	vector error correction
ZIL	zákon iterovaného logaritmu

## Použité značení

Pro lepší přehlednost používáme zpravidla následující konvence a symboly:

$\mathbf{C}$	velká tučná písmena z počátku abecedy označují matice konstant
$c^{ij}$	horní indexy označují prvek matice $\mathbf{C}$ na $i$ -tém řádku v $j$ -tém sloupci
$\mathbf{c}$	malá tučná písmena označují vektory
$\mathbf{c}^{i\bullet}$	pomocí symbolu $\bullet$ označujeme $i$ -tý řádek matice $\mathbf{C}$
$\mathbf{C}_t$	dolní index označuje $t$ -tý prvek posloupnosti $\{\mathbf{C}_t\}_t$
$\mathbf{I}_m$	jednotková matice ( $m \times m$ )
$X$	velká písmena z konce abecedy označují náhodné veličiny
$\mathbf{X}$	velká tučná písmena z konce abecedy označují náhodné vektory
$\xrightarrow{\text{s.j.}}$	konvergence skoro jistě
$\xrightarrow{\text{d}}$	konvergence v distribuci
$\xrightarrow{P}$	konvergence v pravděpodobnosti
l. i. m.	konvergence podle kvadratického středu

# Seznam obrázků

3.1	BN rozklad reálného kurzu USD/CZK - přesný výpočet. . . . .	31
3.2	Aproximace pro $K = 1$ . . . . .	32
3.3	Aproximace pro $K = 5$ . . . . .	32
3.4	Aproximace pro $K = 10$ . . . . .	33
3.5	Aproximace pro $K = 20$ . . . . .	33

# Seznam tabulek

3.1	Použitá data. . . . .	30
3.2	Doporučený řád modelu na základě různých kriterií. . . . .	30
3.3	P-hodnoty ADF testu. . . . .	31
3.4	Výsledky Johansenova testu. . . . .	31