Vážení kuliček

Všimněme si, že vážení na rovnoramenných vahách vždy rozdělí množinu kuliček právě na tři množiny, množinu L na levé misce, množinu R na pravé misce a množinu O ostatních kuliček. Navíc, jsou-li množiny L a R stejně velké, potom po vážní můžeme rozhodnout, ve které skupině je těžší kulička (je-li jedna z množin L či R těžší, je v ní, jinak je v množině O). Volíme-li množiny L a R různě velké, bude typicky těžší ta větší z nich a nezjistíme nic.

Odhad minimálního počtu vážení. Označme $n = n_0$ původní počet kuliček, označme n_k počet kuliček zbývající po k-tém vážení. Jelikož při každém vážení dělíme množinu kuliček na 3 části, má alespoň jedna z těchto částí velikost alespoň $\frac{n_i}{3}$. Uvažujme, že těžší kulička bude po vážení vždy v největší skupině. Dostáváme potom

$$n_{i+1} \geq \frac{n_i}{3}$$

a tedy

$$n_k \geq \frac{n_{k-1}}{3} \geq \frac{n_{k-2}}{3^2} \geq \cdots \geq \frac{n_0}{3^k}.$$

Abychom mohli tvrdit, že jsme po k váženích nalezli těžší kuličku, musí být $n_k = 1$ a tedy

$$1 \geq \frac{n_0}{3^k},$$

neboli

$$3^k \geq n_0,$$

neboli

$$k \geq \log_3 n_0$$

a jelikož k je celé číslo, platí

$$k \geq \lceil \log_3 n_0 \rceil .$$

Získali jsme tedy odhad na nutný počet vážení v případě, že těžší kulička padne při každém vážení do největší skupiny (a všimněme si, že platí pro libovolnou strategii).

Odhad, který by pro nás byl zajímavý, by byl co nejlepší odhad počtu vážení v nejhorším případě při libovolné strategii. Mohli bychom se pokusit ukázat, že nejhorším případem je vždy právě připadnutí těžší kuličky do největší skupiny – například je dobře uvěřitelné, že počet nutných vážení je v závislosti na počtu kuliček neklesající. Všimněme si ale, že odhad, který máme (byť neumíme zaručit, že je nejlepší), je jistě odhadem pro nejhorší případ, neboť případ, kdy těžší kulička připadá do největších skupin, jistě vždy nastat může a nějaký *nejhorší* případ bude jistě potřebovat alespoň stejný počet vážení.

Nalezneme-li nyní strategii vážení, která v nejhoším případě vyžaduje právě $\lceil \log_3 n_0 \rceil$ vážení, bude tato strategie optimální.

Jistá optimální strategie. Označme množinu kuliček M_0, počet kuliček $n = n_0$, množinu kuliček v i-tém kroku M_i a počet kuliček v i-tém kroku n_i. Algoritmus probíhá následovně:

1. Buď $i = 0$.
2. Je-li $n_i = 1$, nalezli jsme těžší kuličku a můžeme skončit, jinak
3. nalezni maximální celé číslo l takové, že $3^l < n_i$,
4. zvol menší z čísel $\lfloor n_i/2 \rfloor$ a 3^l a označ jej p
5. rozděl M_i na množiny L_i a R_i o velikosti p a zbývající množinu O_i, zvaž L_i a R_i na rovnoramenných vahách.
6. Je-li některá z vážených množin těžší, položme ji jako M_{i+1}, váží-li stejně, označme $M_{i+1} := O_i$. Označme $n_i + 1$ velikost množiny M_{i+1}.
7. Zvyš i o 1 a vrať se ke kroku 2.

Je zřejmé, že pokud tento algoritmus skončí, potom nalezl těžší kuličku. Stačí tedy ukázat, že skončí vždy. Všimněme si, že pro každé i platí $1 \leq n_{i+1} < n_i$, neboť alespoň jedna ze skupin L_i a R_i je vyřazena, jsou-li však vyřazeny obě, obsahuje skupina O_i alespoň jednu - právě tu těžší - kuličku. Jelikož neexistuje nekonečná ostře klesající posloupnost přirozených čísel, musí jednou nastat $n_i = 1$ a algoritmus skončí.

Odhadněme nyní počet vážení ke kterým v algoritmu dojde. Označme počet vážení pro n kuliček m_n.

Všimněme si nejprve, že označíme-li n_0, n_1 jako v algoritmu, platí $m_{n_0} = 1 + m_{n_1}$.

Ukažme, že je-li $n_0 \leq 3^k$ potom $m_{n_0} \leq k$. Postupujme indukcí podle k.

První krok: $k = 0$, $1 \leq n_0 \leq 3^0 = 1$, tedy $n_0 = 1$ a

$$m_{n_0} = m_1 = 0 \leq 0.$$

Indukční krok: Buď nyní $k \geq 1$, $n_0 \leq 3^k$. Potom l nalezené v kroku 3 algoritmu splňuje $l < k$. Připadne-li v kroku 5 těžší kulička do jedné z vážených skupin, bude $n_1 = \min(\lfloor n/2 \rfloor, 3^l) \leq 3^l$, připadne-li do skupiny O_1, bude $n_1 \leq 3^l$, neboť v takovém případě

$$n_1 = n_0 - 2 \cdot p,$$

a kdyby platilo $n_1 > 3^l$, dostali bychom

$$n_0 = 2 \cdot p + n_1 > 2 \cdot p + 3^l.$$

Je-li $p = \lfloor n_0/2 \rfloor$, potom dostáváme

$$n_0 > 2 \cdot \lfloor n_0/2 \rfloor + 3^l \geq 2 \cdot \lfloor n_0/2 \rfloor + 1 \geq n_0,$$

což je spor, a v případě že $p = 3^l$ dostáváme

$$n_0 > 2 \cdot 3^l + 3^l = 3^{l+1}$$

což je ale ve sporu s volbou l v kroku 3 algoritmu. Máme tedy $n_1 \leq 3^l$, kde $l < k$. Podle indukčního předpokladu je tedy $m_{n_1} \leq l$ a

$$m_{n_0} = m_{n_1} + 1 \leq l + 1 \leq k - 1 + 1 = k$$

.

Volíme-li nyní k nejmenší takové, že $n_0 < 3^k$, dostáváme

$$m_{n_0} \leq k = \lceil \log_3 n_0 \rceil$$

Závěr. V první části jsme ukázali, že jakákoliv strategie vážení n_0 kuliček bude v nejhorším případě vyžadovat alespoň $\lceil \log_3 n_0 \rceil$ vážení. Nyní jsme nalezli strategii, která bude vždy vyžadovat nejvýše $\lceil \log_3 n_0 \rceil$ vážení. Tato strategie bude tedy optimání.